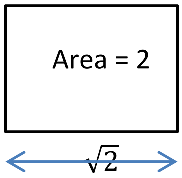
La favolosa storia della radice quadrata di due

La radice quadrata di 2, che vale approssimativamente 1,414213562, è, secondo la definizione attualmente più in voga, «il numero che, moltiplicato per se stesso, dà 2». È anche «la radice del quadrato di dimensioni pari a 2», ovvero la lunghezza del lato di un quadrato di area 2. È questo carattere geometrico che fa di questa «radice» un punto di partenza, un'origine.



Un quadrato di area 2 ha il lato lungo pari a $\sqrt{2}$, ovvero $\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ = 2

Entrambe le definizioni potrebbero farci pensare di avere a che fare con un numero buono solamente a esprimere la soluzione di un problema di geometria per degli studenti cui si chieda di imparare che l'area A di un quadrato di lato a è data dalla formula $A = a^2$. In realtà, non solo i due aspetti (quello algebrico e quello geometrico) hanno numerosissime conseguenze in direzioni spesso inattese, ma la radice quadrata di 2 ammette ulteriori definizioni, e anche queste danno vita a ramificazioni che si estendono ben oltre il semplice calcolo dell'area di un quadrato. È così che i campi in cui interviene questo numero almeno quattro volte millenario nella storia del pensiero sono di una varietà pressoché infinita.

Se la radice quadrata di 2 fosse un personaggio, forse sarebbe la dea Atena nel pantheon dei numeri. Entrambe, infatti, ispirano tanto le azioni degli artigiani e degli ingegneri quanto le riflessioni intellettuali di un Platone. Entrambe rappresentano il rigore, ed entrambe appaiono in situazioni assai diverse tra loro. Infine, proprio come la protettrice di Atene si mostra attenta sia ai bambini che ai guerrieri più valorosi, la radice di 2 si rivela utile tanto ai semplici dilettanti quanto ai matematici più smaliziati, offrendo a tutti quanti un'occasione per meravigliarsi, scoprire e imparare. Con lei siamo ben lontani da quell'altro inquilino dell'Olimpo matematico che è il numero pi greco (π), il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro, che vale più o meno 3,14. Molti matematici lo considerano, tra i numeri, come «il più glorioso, il più grande», per usare le parole pronunciate nell'Iliade da Agamennone a proposito di Zeus. Proprio come il dio sovrano della mitologia greca, però, π si rivela spesso di una potenza soffocante: molte delle sue proprietà sono difficili da determinare, e non sono pochi i dilettanti e i matematici che faticano a cogliere il senso profondo della dimostrazione dei tanti risultati significativi sul «re dei numeri». La radice di 2, dal canto suo, è più accessibile, pur mettendo in mostra una gran quantità di ricchezze e di splendori matematici.

Una caratteristica che accomuna molti membri dell'Olimpo dei numeri è la proprietà di «irrazionalità». Si dice che un numero è irrazionale quando non può essere ottenuto come risultato della divisione di un numero intero per un altro: così, per definizione, i numeri 8/5, 1/3 o 287 645/1000 sono tutti numeri razionali (le loro espressioni decimali sono, rispettivamente, 1,6, 0,333333… e 287,645). La radice di 2, invece, non può essere associata ad alcuna frazione. Certo, alcune approssimano √2 con la precisione che si desidera, come 7/5 (che vale 1,4), 14 142/1000 (che vale 1,4142) o 577/408 (che vale approssimativamente 1,414216), ma nessuna di loro esprime in maniera esatta il valore della radice di 2, tanto è restia quest'ultima a qualsiasi rappresentazione frazionaria.

La nozione di irrazionalità è una delle più importanti di tutta la matematica. Anche se la radice di 2 non è affatto il solo numero irrazionale, ci sono tuttavia due ragioni che spingono a prenderla spesso come esempio. La prima è che, a differenza di altri numeri irrazionali «abituali» (come π), è possibile dimostrarne il carattere irrazionale con un bagaglio matematico molto ridotto; in altre parole, se gli irrazionali sono «i più complicati tra i numeri», la radice di 2 è, in un certo senso, il più semplice di questi numeri complicati. La seconda ragione è che forse la radice di 2 è stata il primo numero irrazionale riconosciuto come tale.

Bisogna però constatare che, malgrado la notorietà che le viene dal suo doppio status di irrazionale e di decana putativa della categoria, la radice di 2 non riceve spesso molta attenzione. Dalla lettura delle innumerevoli presentazioni generali della teoria dei numeri sembra che il rango matematico della radice di 2 non vada oltre quello dell'eterno esempio semplice, che permette di introdurre la nozione di numero irrazionale e di evocare qualche fatto storico. Chissà, forse è proprio perché costituisce il pane quotidiano dei matematici che ci si dimentica di dedicarle più attenzione. Forse la radice di 2 viene usata troppo spesso perché possa nascere spontanea l'idea di guardarla con la stessa curiosità che ci spinge ad ammirare le meraviglie nascoste e inattese di pi greco.

Una prima caratteristica interessante della radice di 2 è che essa rappresenta una porta aperta su interi settori della matematica, sia antica che moderna: la geometria e la teoria dei numeri, ma anche la logica, l'algebra, l'aritmetica, l'analisi e, più recentemente, l'algoritmica, le strutture di dati, i numeri gadici e la dinamica simbolica. Ovviamente la radice di 2 non è al centro di tutte le teorie di cui permette di parlare, ma la quantità incredibile di contesti in cui è in grado di fornire un filo conduttore basta a giustificare il posto che le viene riservato nel pantheon dei numeri. Era proprio questa, d'altro canto, l'intenzione iniziale di utilizzare la radice di 2 come punto di partenza verso destinazioni che offrano allo sguardo alcuni dei più bei paesaggi matematici. Ispirandoci all'esempio di Srinivasa Ramanujan, il matematico indiano del xx secolo di cui si diceva che vivesse circondato dai numeri come se ognuno di essi fosse per lui un amico intimo, ho pensato di prendere la radice di 2 come semplice compagna di viaggio, per condividere avventure intellettuali impensabili al di fuori del mondo matematico. E così vedremo spesso in questo ruolo così prezioso (è un punto di vista utilizzato in un libro di David Flannery, The Square Root of 2, pubblicato nel 2006: concepito in forma di dialogo tra un professore e un suo studente, il libro utilizza √2 essenzialmente come strumento pedagogico).

A un'analisi più approfondita, però, si vede che la radice di 2 è ben di più di una semplice guida. Costante matematica fondamentale, proprio come lo sono per la fisica la velocità della luce o la carica dell'elettrone, la radice di 2 è un numero dai mille volti, non solo teorici ma anche pratici e storici. Certo, questo non vuol dire che in tutti i risultati si debbano ricercare a ogni costo delle caratteristiche particolari di √2. In matematica, infatti, non ha senso parlare di un'entità isolandola da tutte le altre. Le proprietà più interessanti di √2 si manifestano soprattutto attraverso il loro legame con gli altri numeri. Nel condividere certe sue proprietà con altri numeri, la radice di 2 si trasforma nell'anello di una catena di numeri legati indissolubilmente da qualche particolarità: grandezza geometrica, quantità irrazionale, radice quadrata, numero algebrico, numero quadratico, «k-numero aureo»… . Ognuna delle proprietà della radice di 2 farà luce a modo suo su uno di questi aspetti, talmente vari che diventa davvero difficile trovare un altro numero capace di lasciare un'impronta analoga su contesti così diversi come la musica, l'architettura o la fotografia. Ciononostante, per quel che ne sappiamo, la diversità di cui parlavamo a proposito della radice di 2 si ritrova solo in parte in un numero come √3, e sparisce quasi del tutto per la maggior parte degli altri numeri.

Tra i pochissimi numeri dotati di una molteplicità di caratteristiche paragonabile a quella della radice di 2 c'è il «numero aureo», ϕ, pari a (1+√5)/2 (cioè circa 1,618). Anche questo Apollo della matematica, vero e proprio fratello della radice di 2, è presente al tempo stesso nella matematica pura e nella realtà più concreta. Il legame tra queste due costanti fondamentali è così profondo che diventa difficile decidere quale delle due sia «la più notevole». Interessarsi alle proprietà dell'una, d'altra parte, si rivela spesso utile per mettere in evidenza certe caratteristiche dell'altra. Le relazioni che legano √2 a ϕ, così come quelle che osserviamo tra √2 e π, mostrano che i numeri notevoli, anziché essere estranei gli uni agli altri, costituiscono una sola e unica famiglia.

Alcune di queste riflessioni sono all'origine della scoperta di qualche risultato matematico nuovo.

Se quello storico è un aspetto della radice di 2, in maniera più specifica alla dimensione concettuale di questo numero nato quattromila anni fa. Dai tempi della civiltà babilonese l'atteggiamento nei confronti di questa entità misteriosa ha subito un'evoluzione profonda. Esempio, o simbolo, di riflessioni talvolta ben lontane dalla matematica propriamente detta – come quando fu utilizzata, dall'antichità greca al Medioevo occidentale, per combattere l'idea che la materia fosse composta da atomi – in tutta la storia del pensiero la radice di 2 è stata una vera e propria cavia, utilizzata per mettere alla pro- va, descrivere e promuovere concetti nuovi.

Come abbiamo già detto, una delle caratteristiche principali della radice di 2 è il fatto di essere un numero irrazionale. Lo si può dimostrare in molti modi diversi. Alcune di queste dimostrazioni sfociano in universi matematici che esploreremo facendoci guidare dalla radice di 2.

Meno matematica delle precedenti, la relazione tra la radice di 2 e la diagonale del quadrato fa di √2 la «duplicatrice delle aree», una proprietà che ha attirato l'attenzione tanto del filosofo Socrate quanto dell'architetto Vitruvio. In qualità di «media geometrica di 1 e 2», la radice di 2 è di interesse per i teorici della musica. Essendo «il numero uguale al doppio del suo inverso», la radice di 2 è all'origine dei formati cartacei normalizzati che utilizziamo quotidianamente. Infine, i riferimenti alla radice di 2 che troviamo in architetti del Rinascimento come il Palladio o Leon Battista Alberti le valgono un rapporto privilegiato con il mondo dell'arte.

Una volta stabilita l'importanza pratica della radice di 2 si pone il problema di calcolarne il valore effettivo. Manifestiamo i legami stretti e inattesi tra la radice di 2 e pi greco, è dedicata al numero di decimali di √2 che bisogna conoscere per soddisfare le necessità pratiche, al modo di calcolarli, alla storia dei record di tale calcolo e, per finire, a una questione di natura teorica: capire se la sequenza infinita di cifre decimali di √2 possiede o no proprietà statistiche identiche a quelle di una successione di cifre estratte a caso, indipendentemente le une dalle altre. Si tratta di un problema ancora irrisolto, formulato un secolo fa e considerato uno dei più difficili della matematica contemporanea.

Il sistema di numerazione decimale costituisce una rappresentazione dei numeri così comoda e familiare che spesso ci si dimentica di considerarlo per ciò che è realmente: un sistema di rappresentazione tra tanti altri. Frazioni continue, rappresentazioni sturmiane e altri approssimanti di Farey sono altrettanti sistemi alternativi che consentono di cogliere in maniera molto più profonda alcune proprietà della radice di 2. Sfruttando queste nuove prospettive nella rappresentazione dei numeri, la radice di 2 è un numero irrazionale «estremo» e quali sono le conseguenze di ciò ,dedicato alle relazioni che uniscono, in cima alla piramide dei numeri, la radice di 2 e il numero aureo.

Ad Atena, «dea dagli occhi scintillanti», i Greci hanno consacrato quel capolavoro eterno che è il Partenone, simbolo di un'intera civiltà. C'è stato un momento in cui, non senza un certo candore, abbiamo creduto che saremmo riusciti a erigere «il tempio della radice di 2». Ora che si è resa palese l'immensità di una tale ambizione non possiamo fare a meno di sorridere dell'irragionevolezza della nostra pretesa iniziale. E ancora continua …