Analisi degli errori

Introduzione

J. R. Taylor, Introduzione all'analisi degli errori, Zanichelli, Bo 1986

Sistemi di unità di misura, rappresentazione numerica delle quantità fisiche e cifre significative

Resnick, Halliday e Krane - Fisica 1 - V ed., Ambrosiana 2003 :
Capitolo 1, pagg. 1 - 13

Stima dell'errore: si indica (o meno) la variabilità dell'ultima cifra significativa, si deduce l'errore percentuale.

Apparecchi di misura

Costituiti da : elemento **rivelatore**, **trasduttore** (- inf. ad utente), **visualizzatore** (indice, scala graduata, display)

Caratteristiche :

Sensibilità (inverso del fattore di taratura, o amplificazione di scala); es. bilancia con 4 div/mg

Soglia di sensibilità (minima quantità rilevabile), parametro piuttosto soggettivo ma che dovrebbe essere non inferiore all'errore strumentale; es. su bilancia rilevasi max 0,2 div, - sensibilità 0,05 mg

Errore strumentale : massimo errore connaturato all'apparecchio, rilevabile mediante misurazione più precisa. Dichiarato negli strumenti elettrici (classe; es. classe 0,5 su portata 10 A errore max 0,5/100x10 0,05 A)

Intervallo di funzionamento (soglia, portata)

Fedeltà (dà sempre la stessa risposta a parità di sollecitazione); errore di fedeltà (cause intrinseche e ambientali) determina dispersione casuale delle misure

Giustezza : la media delle misure coincide con il valore reale della quantità; l'errore di giustezza è un errore sistematico, di taratura o di rilevazione

Precisione giustezza fedeltà (errore massimo/valore misurato, dipende dall'influenza di fattori che determinano l'irreproducibilità di ogni valore misurato)

Prontezza

Quantità misurata : M V. Se la quantità misurata è sempre la stessa, allora V semidispersione (M_{max} M_{min} /2 è l'errore massimo dovuto alla soglia di sensibilità dello strumento. Se la quantità misurata presenta una dispersione, allora una certa media (deviazione standard) delle misure rappresenta l'errore statistico. Questo deve risultare maggiore dell'errore massimo di sensibilità, spesso l'apparecchio è progettato per questo scopo.

Cenni : su errori sistematici, difetti di funzionamento, errate condizioni di impiego, interazione fra strumento e sistema di misura, disturbi

Incertezze nelle misure dirette

J. R. Taylor:

(2.5) : gli errori sperimentali dovrebbero di regola essere approssimati ad una (massimo due, se la prima è 1) cifre significative.

Propagazione degli errori

L’errore assoluto sulla somma o differenza di variabili è in generale la somma concorde degli errori assoluti sulle variabili (limite superiore); ma per errori indipendenti e casuali si può dire che la varianza risultante è la somma delle varianze.

L’errore relativo su un prodotto o quoziente è in generale la somma concorde degli errori relativi sui fattori (limite superiore); ma per errori indipendenti e casuali si può dire che l’errore relativo risultante al quadrato è uguale alla somma dei quadrati degl errori relativi sulle variabili componenti.

L’errore sul valore di una funzione di variabile è pari al modulo della derivata della funzione rispetto alla variabile per l’errore sulla variabile.

Il quadrato dell’errore su una funzione di diverse variabili è la somma dei quadrati degli errori sulle variabili.

Distribuzione delle misure

Date N misure si ha

Media aritmetica o espettazione :

$$M \qquad {}_{i} \; \frac{M_i}{N} \qquad \#$$

Media degli scarti (o scostamenti dalla media) :

$${}_{i} \; \frac{M \quad M_i}{N} \qquad 0$$

Teorema: Il valor medio della somma di più variabili è uguale alla somma dei valori medi delle singole variabili

Teorema: Il valor medio del prodotto di più variabili indipendenti è uguale al prodotto dei valori medi delle singole variabili

Varianza (o media quadratica degli scarti, o momento d’inerzia) :

$$s^2 \qquad \frac{{}_{i} \; M \quad M_i \;\; {}^{2}}{N} \qquad \frac{{}_{i} \, M_i{}^2}{N} \qquad M^2$$

o meglio :

$$s^2 \qquad \frac{{}_{i} \; M \quad M_i \;\; {}^{2}}{N \quad 1}$$

Teorema: La media dei quadrati degli scarti presi non rispetto alla media ma rispetto ad un altro qualsiasi valore è uguale alla varianza (rispetto alla media) il quadrato della differenza fra quel valore e la media. Consegue :

Proprietà : la media è quel valore rispetto a cui la varianza è minima (principio dei minimi quadrati)

Teorema: La varianza della somma di variabili indipendenti è uguale alla somma delle varianze delle singole variabili

Teorema: La varianza di una funzione di più variabili indipendenti è uguale alla somma delle varianze delle singole variabili pesate con i quadrati delle derivate parziali della funzione (calcolate nei valori medi) rispetto alle corrispondenti variabili

Proprietà: La varianza di una serie di valori M_i è identica alla varianza di una serie di

valori (più facili da manovrare) $M_i \quad H, H$ un valore qualsiasi

Deviazione Standard (o RMS, o scarto quadratico medio, o scarto tipico):

$$s \quad \sqrt{\frac{{}_i\, M \quad M_i\ ^2}{N}} \quad \sqrt{\frac{{}_i\, M \quad M_i\ ^2}{N \quad 1}} \qquad \#$$

Errore massimo:

$$\text{Quantità misurata} \quad M \quad V$$

Errore statistico:

$$\text{Quantità misurata} \quad M \quad s$$

e corrispondenti errori relativi. 1 3.

Distribuzione normale o di Gauss

Principio di Bernoulli (legge empirica del caso, teoremi sui grandi numeri):

$$p\ M \quad \lim_{N} \frac{v\ M}{N}$$

Le frequenze di valori compresi in intervalli tipici vengono generalmente presentate in forma di istogramma.

Distribuzione limite : N

Probabilità congiunta di eventi indipendenti prodotto delle probabilità

Probabilità totale di eventi indipendenti somma delle probabilità

Teorema: Se nel determinare i valori di una variabile intervengono molte cause di disturbo, tutte egualmente probabili, con effetti sia positivi che negativi, ma piccoli rispetto alla media della variabile, allora la distribuzione limite è di Gauss:

$$P\ M \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \quad \frac{M \quad M_0\ ^2}{2\ ^2}$$

M_0 valore centrale, ma anche valor medio

dispersione scarto quadratico medio

$h \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$ modulo di precisione

68,3 % dei valori sono compresi fra

95,4 % dei valori sono compresi fra 2

99,7 % dei valori sono compresi fra 3

La verifica di queste tre condizioni ci permetterà di accettare l'analisi della misura secondo il principio di Gauss

La definizione (ref: bbb) di deviazione standard per N convergerà al valore di

Misure in numero finito e piccolo

Per misure in numero finito:

la media (ref: aaa) è il valore che ha la massima probabilità di rappresentare il valore centrale della distribuzione normale per ogni serie di misure, avremo una media statistica: questa è allora a sua volta una variabile aleatoria, con un valore medio e una varianza :

Deviazione Standard della media (o errore standard, o errore standard della media, o dispersione della media) :

$$s_M \quad \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Per questa proprietà, dato un valor medio trovato in una serie di misure, possiamo con elevato grado di sicurezza affermare che il valore centrale della distribuzione limite non differisce da questo per più di $3 s_M$.

Inoltre: calcoliamo la varianza rispetto al valore centrale:

$$^2 \quad s_0^2 \quad \frac{{}_i\, M_0 \quad M_i \ ^2}{N} \quad \frac{{}_i\, M_0 \quad M \quad M \quad M_i \ ^2}{N}$$

$$M_0 \quad M \ ^2 \quad \frac{{}_i\, M \quad M_i \ ^2}{N} \quad \frac{2}{N} \quad \frac{{}_i\, M \quad M_i \ ^2}{N}$$

$$^2 \quad \frac{{}_i\, M \quad M_i \ ^2}{N \quad 1}$$

Miglior stima di misure inomogenee

La media di misure inomogenee è una media pesata con il modulo di precisione di ogni misura al quadrato. La dispersione è la radice dell'inverso della somma dei moduli di precisione al quadrato:

$$M_{best} \quad \frac{h_i^2 M_i}{h_i^2}$$

$$_{best} \quad \sqrt{\frac{1}{h_i^2}}$$

$$M_{best} \quad _{best}$$

Rigetto di dati e criterio di Chauvenet

Se i risultati di alcune misure sono manifestamente discrepanti con gli altri, ma non si ha ragione di rigettarli in base a valutazioni razionali sulla affidabilità o giustezza delle procedure seguite, le anomalie possono essere valutate alla luce del criterio di Chauvenet.

Si calcola la distanza della misura anomala dalla media e si valuta attraverso la funzione erf la probabilità che un valore cada al di fuori dell'intervallo di riferimento più prossimo (,2 ,3). Se la frequenza rappresentativa della misura anomala (1/N) è sufficientemente più elevata di questa probabilità, allora è "ridicolmente improbabile" che la misura sia affidabile e può essere rimossa dall'insieme di misura.

Metodo dei minimi quadrati (regressione lineare)

Supponiamo di diagrammare le misure di una variabile M in funzione di una variabile x, per semplicità assunta in ogni suo valore nota senza incertezza. Dato l'insieme delle misure $M_i(x_i)$, cerchiamo la retta interpolatrice delle misure che abbia la massima probabilità di rappresentare la reale funzione M(x).

Ipotizziamo che la media di (virtuali) misure eseguite per un valore di x_i possa appunto scriversi come funzione lineare di x:

$$\bar{M}_i(x_i) = A + Bx_i$$

e determiniamo i migliori valori per A e B.

Scriviamo la varianza:

$$\sigma_M^2 = \frac{\sum_i \left(M_i - \bar{M}_i(x_i)\right)^2}{N-1} = \frac{\sum_i \left(M_i - A - Bx_i\right)^2}{N-1}$$

Riconsideriamo ora la (precedentemente enunciata)

Proprietà : la media è quel valore rispetto a cui la varianza è minima (principio dei minimi quadrati)

Per il principio di minimo, potremo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial A} \sum_i \left(M_i - A - Bx_i\right)^2 = \sum_i -2\left(M_i - A - Bx_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum_i \left(M_i - A - Bx_i\right)^2 = \sum_i -2x_i\left(M_i - A - Bx_i\right) = 0$$

ovvero

$$A + B\frac{\sum_i x_i}{N} = \frac{\sum_i M_i}{N}$$

$$A + B\frac{\sum_i x_i^2}{\sum_i x_i} = \frac{\sum_i x_i M_i}{\sum_i x_i}$$

$$A = \frac{\left[\sum_i x_i^2\right]\left[\sum_i M_i\right] - \left[\sum_i x_i\right]\left[\sum_i x_i M_i\right]}{N\left[\sum_i x_i^2 - \left[\sum_i x_i\right]^2\right]}$$

$$B = \frac{N\left[\sum_i x_i M_i\right] - \left[\sum_i M_i\right]\left[\sum_i x_i\right]}{N\left[\sum_i x_i^2 - \left[\sum_i x_i\right]^2\right]}$$

$$\sigma_M^2 = \frac{\sum_i \left(M_i - A - Bx_i\right)^2}{N-2}$$

Poichè A e B sono dati in termini di $\left[\sum_i M_i\right], \left[\sum_i x_i M_i\right]$ che sono affetti da incertezze (calcolabili con le regole di propagazione), è possibile calcolare l'incertezza dei loro valori:

$$ {}_{A}^{2} \quad \frac{{}_{M}^{2} \quad {}_{i} x_i^2}{N\left[\quad {}_{i} x_i^2 \quad \left[\quad {}_{i} x_i \right]^2 \right]} $$

$$ {}_{B}^{2} \quad \frac{{}_{M}^{2}}{\left[\quad {}_{i} x_i^2 \quad \left[\quad {}_{i} x_i \right]^2 \right]} $$