

# CALCOLO DELLE PROBABILITA'

## Definizioni

In questa pagina elenchiamo alcune definizioni utili per affrontare lo studio del calcolo delle probabilità.

Eventi:

- Dipendenti ed indipendenti
- Certi ed impossibili
- Mutuamente escludentesi
- Equiprobabili
- Contrari
- Somma
- Prodotto
- Probabilità condizionata
- Gruppo completo di eventi
- Variabili aleatorie

Caratteristiche numeriche delle variabili aleatorie: Valore atteso di una variabile aleatoria

# GLI EVENTI

Nel calcolo delle probabilità con la parola evento si intende ogni fatto che in seguito ad una prova può accadere oppure no.

Qualche esempio:

- l'apparizione di testa quando si lancia una moneta
- l'apparizione di un asso quando si estrae una carta da un mazzo
- la rivelazione di una data particella in un acceleratore

Ad ogni evento è associato un numero reale che è tanto maggiore quanto più è elevata la possibilità che si verifichi l'evento stesso: chiamiamo tale numero probabilità dell'evento.

## EVENTI DIPENDENTI ED INDIPENDENTI

Si dice che l'evento A è **dipendente** dall'evento B se la probabilità dell'evento A dipende dal fatto che l'evento B si sia verificato o meno.

Mentre diciamo che l'evento A è **indipendente** dall'evento B se la probabilità del verificarsi dell'evento A non dipende dal fatto che l'evento B si sia verificato o no.

## EVENTI CERTI ED IMPOSSIBILI

Definiamo **evento certo** quell'evento che in seguito ad un esperimento deve obbligatoriamente verificarsi. Tale evento costituisce l'unità di misura per la probabilità: si attribuisce, cioè, all'evento certo probabilità uguale all'unità. Di conseguenza tutti gli altri eventi, probabili ma non certi, saranno caratterizzati da probabilità minori all'unità.

L'evento contrario all'evento certo è detto **impossibile**, ossia un evento che non può accadere nella prova in questione. All'evento impossibile è associata una probabilità uguale a zero.

## EVENTI MUTUAMENTE ESCLUDENTESI

Si dicono **eventi mutuamente** escludentesi o *incompatibili* quegli eventi aleatori che non possono verificarsi simultaneamente in una data prova. Ad esempio l'apparizione simultanea di testa e di croce nel lancio di una moneta.

## EVENTI EQUIPROBABILI

Degli eventi casuali si dicono **equiprobabili in una data prova** se la simmetria dell'esperimento permette di supporre che nessuno di essi sia più probabile di un altro. Ad esempio l'apparizione di una delle sei facce di un dado nel caso in cui questo sia regolare (non truccato).

## EVENTI CONTRARI

Si dicono **eventi contrari** due o più eventi mutuamente escludentesi che formano un gruppo completo. Ad esempio i due eventi - passare l'esame, essere bocciati - costituiscono una coppia di eventi contrari.

## SOMMA DEGLI EVENTI

Si definisce **somma** di due eventi A e B l'evento C che consiste nel verificarsi dell'evento A o dell'evento B o di entrambe. La probabilità dell'evento C si scrive nel seguente modo:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A + B) = P(A \text{ oppure } B)$$

Si veda a questo proposito il teorema di addizione delle probabilità

In generale definiamo la **somma** di un numero qualsiasi di eventi l'evento che consiste nel verificarsi di almeno uno di questi.

## PRODOTTO DEGLI EVENTI

Si chiama **prodotto** di due eventi A e B l'evento C che consiste nel verificarsi *simultaneo* degli eventi A e B. La probabilità dell'evento C si indica nel seguente modo:

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A \text{ e } B)$$

A questo proposito si veda il teorema di moltiplicazione delle probabilità. In generale definiamo il **prodotto** di un numero qualsiasi di eventi l'evento che consiste nel verificarsi di tutti questi eventi.

## PROBABILITA` CONDIZIONATA

La probabilità che accada l'evento A, calcolata a condizione che l'evento B si sia verificato o meno, si dice **probabilità condizionata** e si denota con:

$$P(A|B)$$

## GRUPPO COMPLETO DI EVENTI

Si dice che eventi casuali formano un **gruppo completo di eventi** se almeno uno di essi deve definitivamente accadere. Ad esempio l'apparizione dei punteggi 1, 2, 3, 4, 5, 6 nel lanciare un dado costituisce un gruppo completo di eventi.

## VARIABILI ALEATORIE

Si dicono **variabili aleatorie** quelle grandezze che posso assumere nel corso di una prova un valore sconosciuto a priori. Si distinguono in variabili aleatorie *discrete* e variabili aleatorie *continue*. Le variabili discrete possono assumere solo un insieme di valori numerabile, mentre i valori possibili di quelle continue non possono essere enumerati in anticipo e riempiono "densamente" un intervallo. Esistono anche variabili aleatorie che assumono sia valori continui che valori discreti: tali variabili sono dette *variabili aleatorie miste*.

## VALORE ATTESO DI UNA VARIABILE ALEATORIA

Con il termine **valore atteso** o **speranza matematica** di una variabile aleatoria si è soliti indicare la *somma dei prodotti di tutti i possibili valori della variabile per la probabilità di questi ultimi*. A seconda che la variabile in questione sia discreta o continua, il *valore atteso* è il momento iniziale di ordine 1.

Il valore atteso è legato al valor medio della variabile, in quanto, per un gran numero di prove la media dei valori osservati di una variabile aleatoria tende (converge) alla sua speranza matematica.

# PROBABILITA`

## Definizioni

Esistono diverse definizioni del concetto di *probabilità*: di fatto si possono elencare almeno quattro definizioni di probabilità, corrispondenti ad altrettanti approcci diversi che evidenziano ciascuno un aspetto di questo concetto.

Le quattro definizioni che andremo ad analizzare sono:

- Probabilità *Classica* o *Oggettiva*
- Probabilità *Empirica*
- Probabilità *Matematica*
- Probabilità *Soggettiva*

# PROBABILITA`

## Teoremi

Per quanto riguarda il calcolo delle probabilità esistono alcuni teoremi fondamentali: elenchiamo quelli che approfondiremo.

Teorema di addizione delle probabilità  
Teorema di moltiplicazione delle probabilità  
Teorema delle probabilità composte  
Formula della probabilità totale  
Teorema delle ipotesi (formula di Bayes)

Nell'illustrazione dei teoremi adotteremo le seguenti convenzioni:

$$P(A \cap B) = P(A \times B) = P(A \text{ e } B)$$

indica la probabilità che i due eventi A e B accadano contemporaneamente

$$P(A \cup B) = P(A+B) = P(A \text{ oppure } B)$$

equivale alla probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi o che si verifichino entrambe.

# DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

Dagli assiomi della probabilità introdotti nella definizione matematica di probabilità data da A.N.Kolmogorov, sappiamo che, dato un insieme di possibili valori mutuamente escludentesi di una variabile aleatoria, per il terzo assioma si ha:

$$\sum_i P(A_i) = 1$$

Cioè la somma delle probabilità di tutti i valori possibili di una variabile aleatoria è uguale all'unità. Questa probabilità totale si *distribuisce* in un certo modo tra i diversi valori della variabile. Al fine di descrivere una variabile aleatoria dal punto di vista probabilistico specifichiamo questa distribuzione, cioè indichiamo esattamente la probabilità di ciascuno dei valori possibili. Si stabilisce così la **legge distribuzione** della variabile aleatoria. Allora possiamo concludere che:

*si definisce **legge di distribuzione** di una variabile aleatoria ogni relazione che stabilisce una corrispondenza tra i valori possibili di tale variabile e la loro probabilità.*

Il fatto che una variabile aleatoria si distribuisca secondo una data distribuzione ci permette di trarre alcune conclusioni importanti tra cui la possibilità di definire quello che viene comunemente chiamato **livello di confidenza**: il livello di confidenza non è altro che la probabilità che l'affermazione a cui esso si riferisce sia vera.

Vediamo alcuni casi di distribuzioni per due differenti tipi di variabili aleatorie:

distribuzioni per variabili discrete  
distribuzioni per variabili continue

# DISTRIBUZIONI DISCRETE

Esistono svariati tipi di distribuzioni per le variabili aleatorie discrete. Quelle che andremo ad analizzare sono:

- distribuzione uniforme
- distribuzione binomiale
- distribuzione di Poisson
- distribuzione ipergeometrica

Va tenuto presente che alcune di queste saranno approssimabili con altre distribuzioni continue nel momento in cui il numero di prove effettuate diventa abbastanza elevato.

# DISTRIBUZIONI CONTINUE

## - Introduzione -

Nel momento in cui si parla di distribuzioni di probabilità per variabili aleatorie continue, bisogna prestare un attimo di attenzione ad un'importante questione. Attribuendo alla variabile aleatoria la potenza del continuo, accade che in un qualsiasi intervallo finito cadano un'infinità di valori della variabile stessa: di conseguenza non si può pensare di attribuire a ciascuno di essi un valore finito della probabilità.

Per questo motivo introduciamo alcuni concetti fondamentali che in seguito ci saranno molto utili per lo studio delle distribuzioni di variabili continue.

Funzione di distribuzione cumulativa  
Funzione densità di probabilità  
Condizione di normalizzazione

Principali distribuzioni continue

## Funzione di distribuzione cumulativa

La *funzione di distribuzione cumulativa* per una variabile aleatoria continua  $X$  è definita come la probabilità che la variabile  $X$  assuma un qualsiasi valore minore di un valore  $x$ :

$$P(X < x) = F(x)$$

La funzione di distribuzione cumulativa è una caratteristica di una variabile aleatoria. Essa esiste per tutte le variabili aleatorie, siano esse discrete o continue.

Vediamone ora alcune *proprietà fondamentali*:

1) La funzione cumulativa  $F(x)$  è una funzione **non decrescente**, vale a dire che per  $x_2 > x_1$

$$F(x_2) \geq F(x_1)$$

si ha

2) Quando l'argomento  $x$  della funzione tende a  $-\infty$  la funzione di distribuzione tende a zero:

$$F(-\infty) = 0$$

3) Quando invece l'argomento  $x$  tende a  $+\infty$  la funzione di distribuzione tende a uno:

$$F(+\infty) = 1$$

Senza dare una dimostrazione rigorosa di queste proprietà vediamo come esse siano di facile comprensione attraverso un esempio: esempio che, per facilitare la comprensione, viene presentato inizialmente per variabili discrete.

Supponiamo di avere una variabile aleatoria discreta che può assumere solo cinque valori: le probabilità di ottenere i singoli valori sono raccolte nella tabella seguente.

$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	0.15	0.37	0.28	0.11	0.09

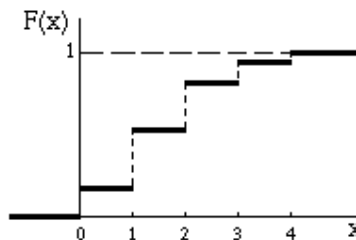
Andiamo ora a "costruire" la funzione di distribuzione cumulativa, tenendo presente che

$$F(X) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

dove la disuguaglianza  $x_i < x$  sotto il segno di sommatoria significa che questa è estesa a tutti gli  $x_i$  inferiori ad  $x$ . Percui abbiamo

$x \leq 0$	$F(x) = 0$
$0 < x \leq 1$	$F(x) = 0.15$
$1 < x \leq 2$	$F(x) = 0.52$
$2 < x \leq 3$	$F(x) = 0.80$
$3 < x \leq 4$	$F(x) = 0.91$
$x > 4$	$F(x) = 1$

Il grafico di tale funzione è dunque il seguente:



La funzione di distribuzione cumulativa di una variabile discreta qualsiasi è sempre una funzione discontinua a gradini i cui salti sono localizzati nei punti corrispondenti ai valori possibili di questa variabile e sono uguali alle probabilità di questi valori. La somma di tutti i salti della funzione, in accordo con il terzo assioma della probabilità, è pari a uno.

A mano a mano che aumenta il numero di valori possibili della variabile aleatoria e diminuiscono gli intervalli tra di essi, il numero di salti diventa sempre più grande e i salti stessi più piccoli. La curva inizialmente a gradini della funzione si avvicina così a una funzione continua, caratteristica delle variabili aleatorie continue.

## Funzione densità di probabilità

Definita la funzione di distribuzione cumulativa, vediamo cosa succede se consideriamo la probabilità che la variabile assuma un qualsiasi valore entro un intervallo di estremi  $x_1$  e  $x_2$ : avremo allora

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Infatti, l'appartenenza della variabile  $X$  all'intervallo di estremi  $x_1$  e  $x_2$  equivale al verificarsi della disuguaglianza

$$x_1 \leq X < x_2$$

Esprimendo la probabilità di questo evento attraverso i seguenti tre eventi

evento  $A$  corrispondente a  $X < x_2$   
evento  $B$  corrispondente a  $X < x_1$   
evento  $C$  corrispondente a  $x_1 \leq X < x_2$

abbiamo che l'evento  $A$  si può esprimere come la somma degli altri due, cioè  $A = B + C$ . Per il teorema di addizione delle probabilità abbiamo

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$$

da cui ricaviamo la formula che avevamo introdotto

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Operando un processo al limite per cui  $\Delta x \rightarrow 0$ , il rapporto tra la differenza della funzione di distribuzione cumulativa e l'intervallo stesso è la derivata

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right] = \frac{dF(x)}{dx}$$

Si definisce la **densità di probabilità** o **funzione di distribuzione**:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

La funzione  $p(x)$  caratterizza la *densità di distribuzione* dei valori della variabile aleatoria in un dato punto  $x$ : la densità di probabilità è una delle forme per esprimere la legge di distribuzione delle variabili aleatorie.

## Condizione di normalizzazione

La condizione di normalizzazione non è altro che la generalizzazione al caso continuo del terzo assioma della probabilità.

Analogamente al caso discreto, nel caso continuo deve valere la seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

che deriva dal fatto che  $F(+\infty)=1$ .

**da inserire principali distribuzione continue**

# LA DISTRIBUZIONE DI GAUSS

## Introduzione

Nella teoria delle probabilità la legge di distribuzione di Gauss riveste un ruolo abbastanza importante: essa costituisce una legge limite, cui tende la maggior parte delle altre distribuzioni sotto condizioni che si verificano abbastanza di frequente. Essa si manifesta ogni volta che la grandezza aleatoria osservata è il risultato della somma di un numero sufficientemente grande di variabili aleatorie indipendenti (o al limite debolmente indipendenti) che obbediscono a leggi di distribuzione diverse (sotto deboli restrizioni). La grandezza osservata si distribuisce seguendo la legge di distribuzione normale in un modo tanto più preciso, quanto è maggiore il numero variabili da sommare. Numerose variabili aleatorie di uso comune, quali ad esempio gli errori di misura, si possono rappresentare come somma relativamente grande di singoli termini (errori elementari), ciascuno dei quali è dovuto ad una causa, non dipendente dalle altre. Quali che siano le leggi di distribuzione cui obbediscono gli errori elementari, le peculiarità di queste distribuzioni non si manifestano nella somma di un gran numero di termini e la somma segue una legge vicina alla legge normale. La sola restrizione imposta agli errori da sommare è di influire relativamente poco sulla somma. Se questa condizione non si verifica e, per esempio, uno degli errori aleatori prevale nettamente sugli altri la legge di distribuzione dell'errore prevalente determina grosso modo la legge di distribuzione della somma.

Quanto enunciato fin'ora va sotto il nome di **teorema centrale del limite**. Il teorema del limite centrale si può utilizzare anche nel caso della somma di numero relativamente piccolo di variabili aleatorie indipendenti. L'esperienza mostra che, per un numero di addendi dell'ordine di una decina, la legge di distribuzione della somma può essere approssimata con la legge normale.

# DISTRIBUZIONI CONTINUE

## Distribuzione uniforme

Variabili aleatorie continue di cui è noto a priori che i loro valori possibili appartengono ad un dato intervallo e all'interno di questo intervallo tutti i valori sono equiprobabili, si dicono *distribuite uniformemente* o che seguono la *distribuzione uniforme*.

Consideriamo una variabile aleatoria  $X$  soggetta ad una legge di distribuzione uniforme nell'intervallo  $(\alpha, \beta)$  e scriviamo l'espressione della densità di probabilità  $p(x)$ . Questa funzione dovrà essere costante ed uguale, diciamo, a  $c$  nell'intervallo  $(\alpha, \beta)$  e nulla al di fuori di esso, perciò

$$p(x) = \begin{cases} c & \text{per } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Poichè per la condizione di normalizzazione, l'area delimitata dalla curva di distribuzione deve essere uguale all'unità si ha

$$c(\beta - \alpha) = 1$$

da cui risulta

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

La densità di probabilità  $p(x)$  assume quindi la forma

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{per } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

## Proprietà della distribuzione uniforme

Le caratteristiche numeriche fondamentali di una variabile aleatoria  $X$  soggetta alla legge di distribuzione uniforme nell'intervallo  $(\alpha, \beta)$  sono le seguenti.

Il valor medio vale

$$\bar{x} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

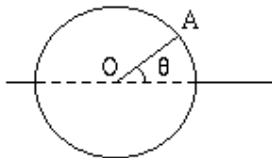
In virtù della simmetria della distribuzione il valore della mediana coincide con quello del valor medio. Si tenga inoltre presente che la distribuzione uniforme non ha moda.

La deviazione standard è pari a:

$$\sigma = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}$$

## Esempi

- **Esempio 1.** Un corpo viene pesato con una bilancia di precisione avendo a disposizione solo pesi multipli di 1 g.; i risultati mostrano che il peso del corpo è compreso tra  $k$  e  $k+1$  grammi. Se si assume che questo peso sia uguale a  $(k+1/2)$  grammi, l'errore commesso ( $X$ ) è, evidentemente, una variabile aleatoria, distribuita con densità di probabilità uniforme nell'intervallo  $(-1/2, 1/2)$  g.
- **Esempio 2.** Una ruota simmetrica in rotazione si arresta a causa dell'attrito. L'angolo formato da un raggio mobile della ruota con un raggio fissato  $OA$  dopo l'arresto della ruota è una variabile la cui densità di distribuzione è uniforme in  $(0, 2\pi)$ .



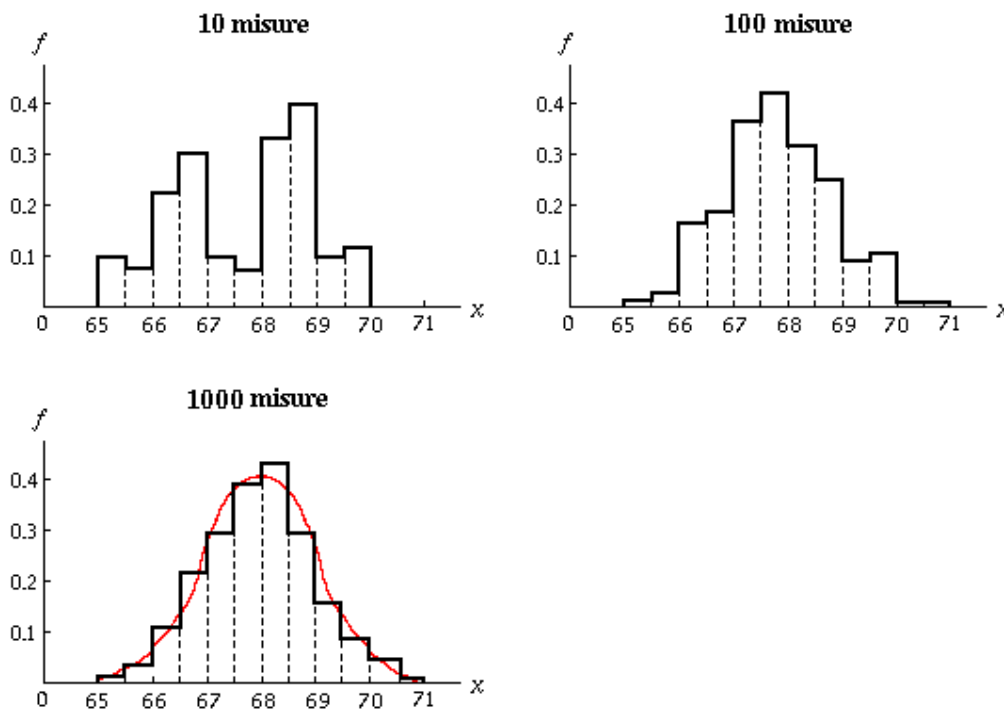
# DISTRIBUZIONI LIMITE

Si parla di distribuzioni limite nel momento in cui il numero di eventi considerati si avvicina all'infinito.

Con la dicitura "si avvicina all'infinito" si intende un numero di eventi, o realizzazioni di una variabile aleatoria, sufficientemente grande, ma anche qui la nostra definizione, di fatto, è ancora poco chiara.

Quello che si vuole dire, quando si parla di distribuzioni limite, è che dopo un certo numero di eventi, i risultati ottenuti si disporranno secondo una determinata distribuzione, mostreranno cioè, al passare delle prove, una determinata distribuzione. Tale distribuzione diviene sempre più evidente all'aumentare degli eventi e, al limite per il numero di realizzazioni che tende all'infinito, la distribuzione assume un carattere continuo.

Vediamo di illustrare quanto detto con un esempio. Consideriamo i tre istogrammi sottostanti i quali mostrano le frazioni ( $f$ ) di misure che cadono nei rispettivi intervalli ( $x=cm$ ) nei casi in cui siano state effettuate 10, 100 e 1000 misure della stessa grandezza.



Si vede abbastanza bene che all'aumentare del numero di misure che effettuiamo la distribuzione dei dati ottenuti si avvicina ad una curva continua, definita. Quando ciò si verifica, la curva continua è detta *distribuzione limite*.

La distribuzione limite è una costruzione teorica, che non può mai essere misurata esattamente: più misure facciamo e più il nostro istogramma si avvicina alla distribuzione limite. Ma soltanto se noi fossimo in grado di effettuare un numero infinito di misure ed di utilizzare intervalli infinitamente stretti, allora otterremmo realmente la distribuzione limite stessa.