Dinamica dei Fluidi

⇒ Equazione indefinita dell'equilibrio dinamico / fluidi ideali

⇒ Teorema di Bernoulli

⇒ Teorema di Bernoulli - estensione alle correnti

⇒ Processi di Efflusso ed esempi

⇒ Correnti in pressione

⇒ Spinte dinamiche

⇒ Teorema di Bernoulli - estensione ai fluidi reali

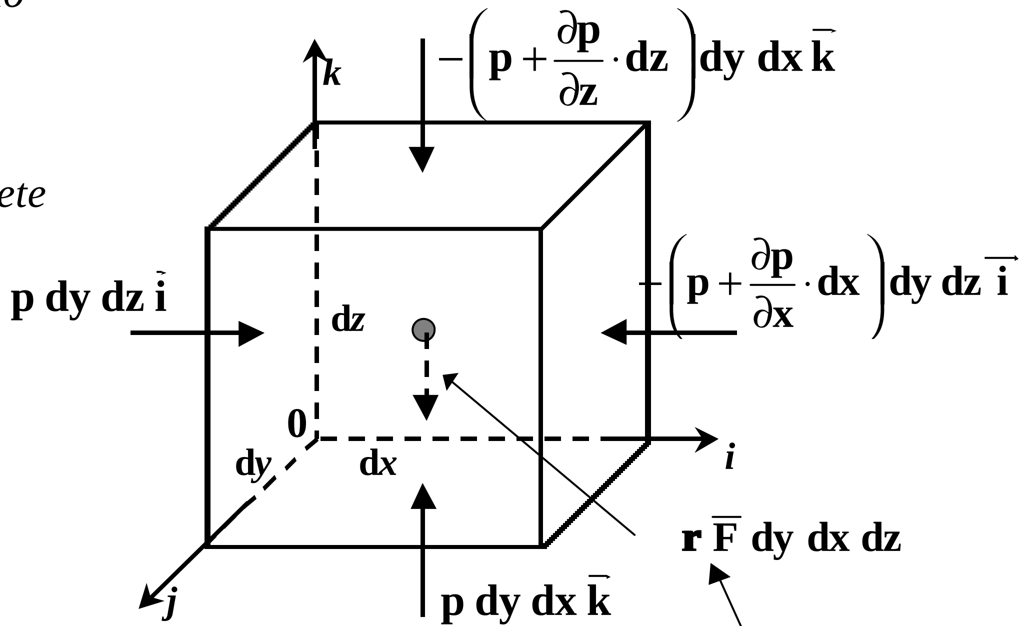
Equazione di equilibrio dinamico / fluido ideale (Eq. di EULERO)

prima eq. cardinale della dinamica

$$\sum \overline{F}_m + \sum \overline{F}_s = m \cdot \overline{a}$$

consideriamo un volumetto infinitesimo di fluido
dove con r *e p indichiamo densità e pressione*

HP.1 Þ Fluido ideale (t = 0 Þ s =p)
distribuzione di pressioni come nel fluido in quiete



forza di massa per unità di massa

⇒ forze di massa **r** $\overline{\mathbf{F}}$ **dy dx dz**

⇒ forze di superficie $-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{dx\ dy\ dz\ i}$

$$-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{dx\ dy\ dz\ j}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \cdot \mathbf{dx\ dy\ dz\ k}$$

$$r\,\overline{F}\ dx\ dy\ dz - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\overline{k}\right)dx\ dy\ dz = r\,\overline{a}\ dx\ dy\ dz$$

$$\boxed{\mathbf{r}\left(\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{a}}\right) = \mathbf{grad}(\mathbf{p})}$$

Eq. di EULERO

Sistema energeticamente chiuso

HP.1 Þ Fluido ideale (t = 0 ® E= cost.) : **r (*F* – *a*) = grad *p* (eq. di Eulero)**

HP.2 Þ Campo gravitazionale (o fluido pesante) : ***F* = – *g* grad *z***

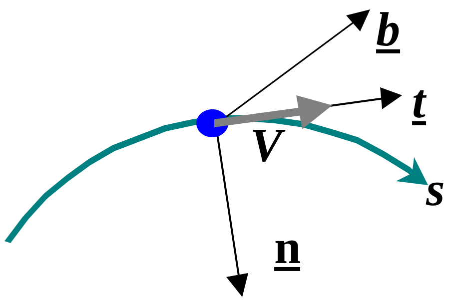
HP.3 Þ Fluido incomprimibile (r = cost.) **r*F* = – r*g* grad *z* = – grad (r*z*)**

$$-r\,\bar a = g\;grad\,z + grad\;p\,;$$

$$-\frac{\bar a}{g} = grad\left(z+\frac{p}{g}\right); \qquad -\frac{\bar a}{g} = -\frac{1}{g}\frac{d\bar V}{dt} = grad\left[z+\frac{p}{g}\right] \Rightarrow \boxed{grad\left[z+\frac{p}{g}\right] = -\frac{1}{g}\frac{d\bar V}{dt}}$$

Moto uniforme e quiete:
a = 0 Þ grad(z+p/g)=0

Consideriamo una traiettoria e proiettiamo l'equazione sulla terna solidale ad una particella di fluido



Proiezioni
(*v* = ï*V* ï)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left[z+\dfrac{p}{\gamma}\right] = -\dfrac{1}{g}\dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\left[z+\dfrac{p}{\gamma}\right] = -\dfrac{v^2}{gr} \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\left[z+\dfrac{p}{\gamma}\right] = 0 \end{cases}$$

"La derivata lungo la normale alla traiettoria è pari all'accelerazione centripeta **v^2/r***"*

Lungo la traiettoria

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=-\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}$$

***v* = *v*(*t*, *s*(*t*))**

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

"regola di derivazione euleriana"

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=-\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$$

Carico Totale

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right]=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}H=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

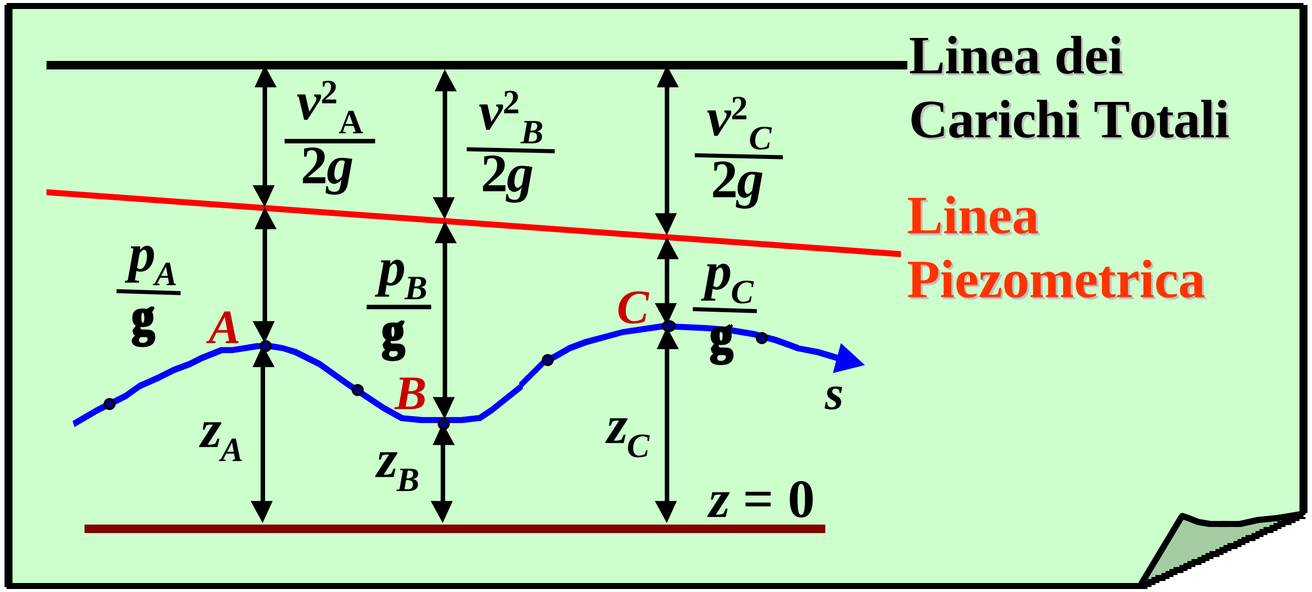
Moto Permanente

$$\frac{\partial H}{\partial s}=0$$

<u>Ipotesi</u>: **(1)** fluido ideale; **(2)** pesante; **(3)** incomprimibile; **(4)** moto permanente

$$\boxed{H=z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=\text{ Costante lungo la traiettoria}}$$

Interpretazione fisica



Il lavoro compiuto su una particella dalle forze che su questa agiscono è uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella stessa

$$z + \frac{p}{\gamma}$$

QUOTA PIEZOMETRICA

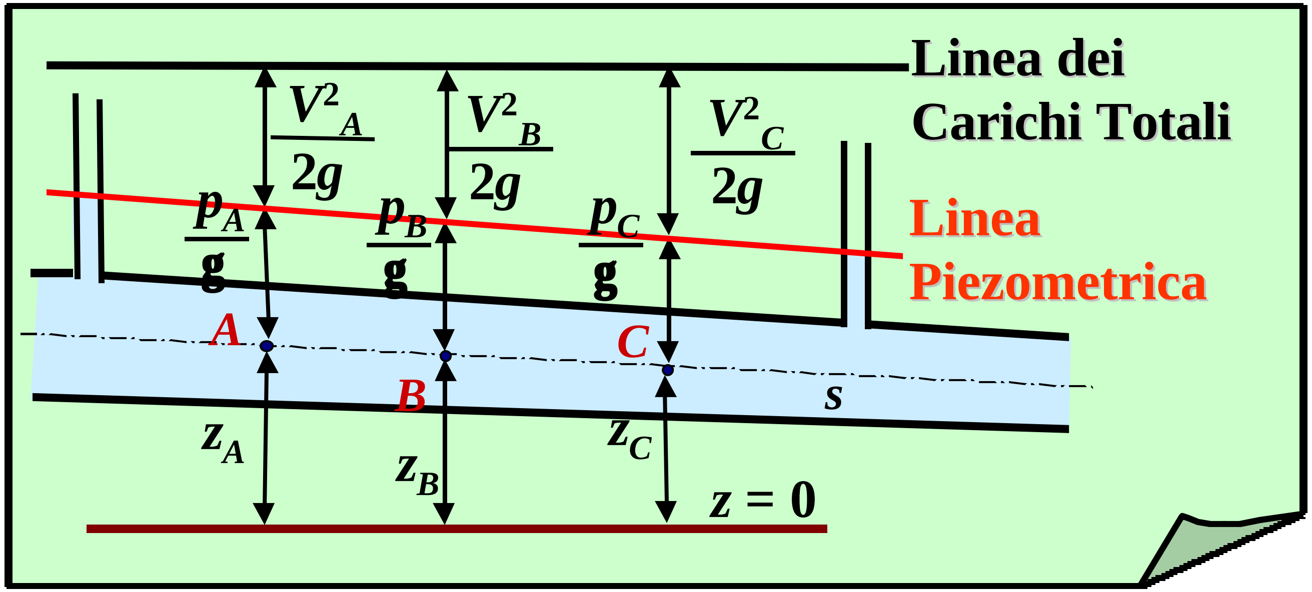
H **= energia specifica (per unità di peso) = CARICO TOTALE**

- $z \Rightarrow$ **energia posizionale (peso = 1)** $\Rightarrow$ **lavoro dell'unità di peso**
  ALTEZZA GEODETICA
- $v^2/2g \Rightarrow$ **energia cinetica (peso = 1)** $\Rightarrow$ **lavoro dell'unità di peso** $[(1/2\, m\, v^2)/mg]$
  ALTEZZA CINETICA (altezza di caduta libera per raggiungere v**)**
- $p/\gamma \Rightarrow$ **energia di pressione (peso = 1)** $\Rightarrow$ **lavoro dell'unità di peso**
  ALTEZZA DI PRESSIONE (altezza di colonna di fluido per produrre la pressione p**)**

Teorema di Bernoulli per correnti

Se ad ogni sezione di vena fluida si potesse assegnare un unico valore di pressione e di carico cinetico

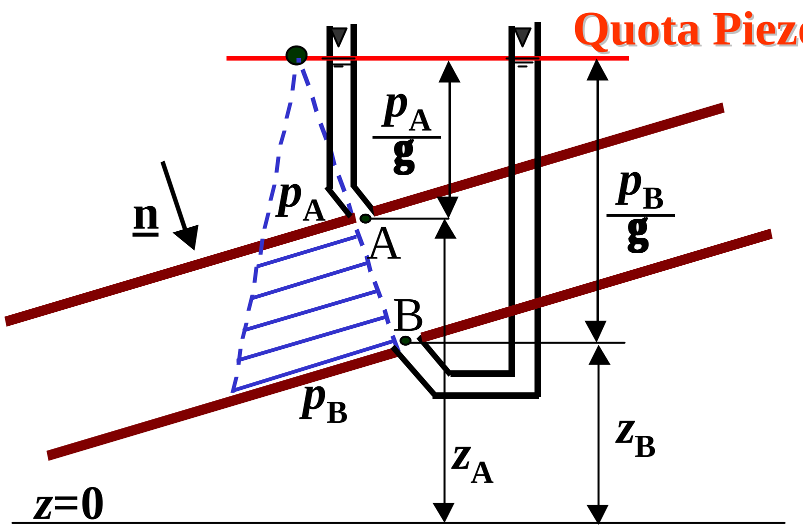
Þ automaticamente si potrebbe estendere il TH. di Bernulli alle correnti.



allora sarebbe lecito riscrivere :

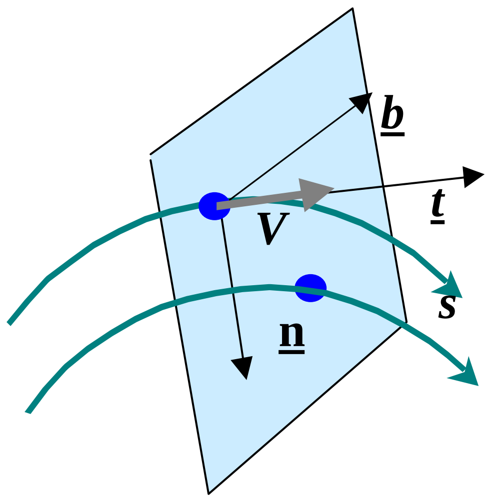
$$H = z + \frac{p}{g} + \frac{V^2}{2g} = \textbf{Costante lungo il percorso}$$

<u>1° Problema :</u> *è lecito utilizzare una sola linea piezometrica per l'intera sezione?*



HP: ***<u>Traiettorie rettilinee</u>***:

$$r = \infty \Rightarrow v^2/(g\ r) = 0$$



Vediamo cosa ci dicono le equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left[z + \dfrac{p}{\gamma}\right] = -\dfrac{1}{g}\dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\left[z + \dfrac{p}{\gamma}\right] = -\dfrac{v^2}{gr} \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\left[z + \dfrac{p}{\gamma}\right] = 0 \end{cases}$$

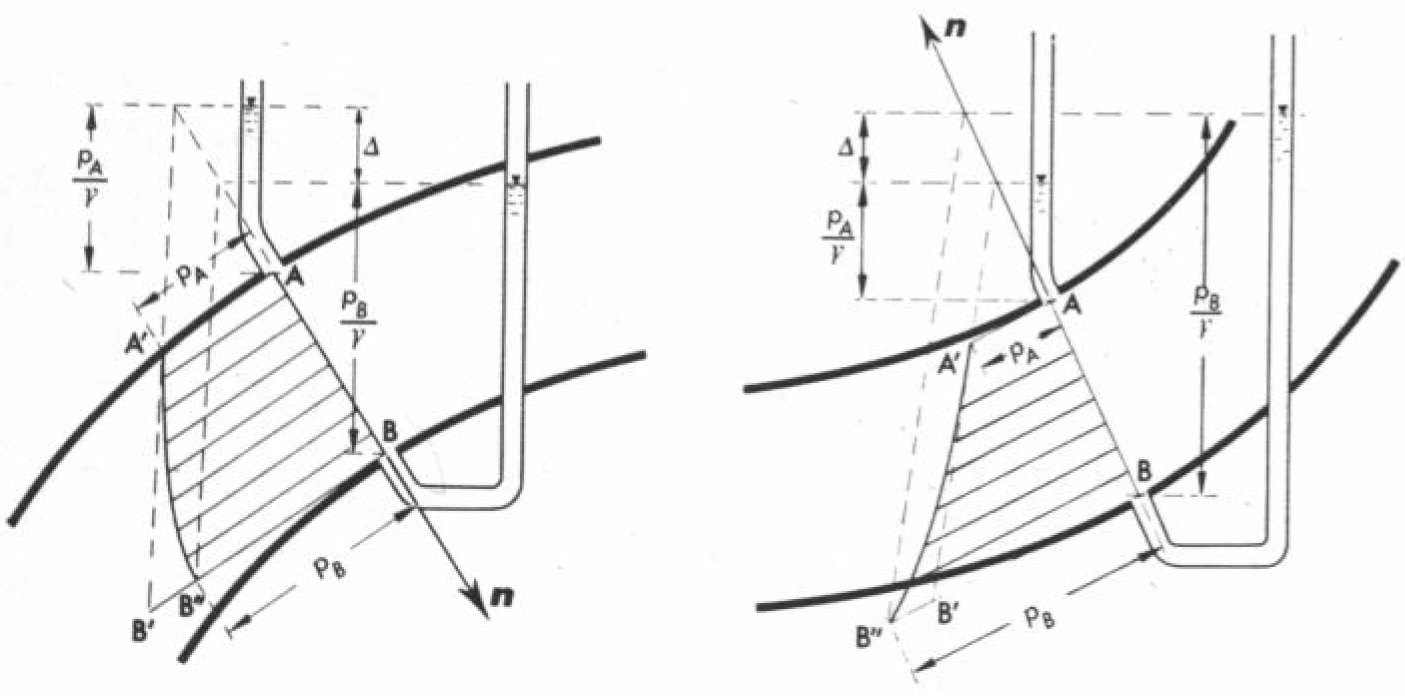
$$\frac{\partial}{\partial n}\left[z + \frac{p}{g}\right] = 0 \Longrightarrow$$

Il termine $z + \frac{p}{g}$ **è costante su tutta la sezione**

La distribuzione delle pressioni sulla sezione è idrostatica

Traiettorie curvilinee:

z + $\frac{p}{g}$ 1 costante



$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=-\frac{v^{2}}{gr}$$

$$\Delta=\left[z_{B}+\frac{p_{B}}{\gamma}\right]-\left[z_{A}+\frac{p_{A}}{\gamma}\right]=-\int_{A}^{B}\frac{v^{2}}{gr}dr$$

un solo punto non è in grado di rappresentare la distribuzione di pressioni in una sezione

---

HP: *se r* è abbastanza grande **Þ** ***Correnti lineari o gradualmente variate***

$$\Rightarrow \frac{v^{2}}{gr}\cong 0 \qquad \Rightarrow \left[z+\frac{p}{\gamma}\right]_{\mathrm{n}}\cong \mathrm{costante}$$

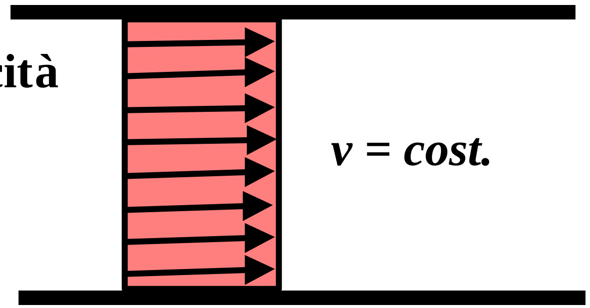
la distribuzione delle pressioni sulla sezione può essere considerata idrostatica

<u>2° Problema :</u> *è lecito utilizzare una sola linea dei carichi totali per l'intera sezione?*

dobbiamo discutere su come si distribuiscono le velocità in una sezione trasversale

Fluido ideale (t = 0)

***<u>Traiettorie rettilinee</u>*:**



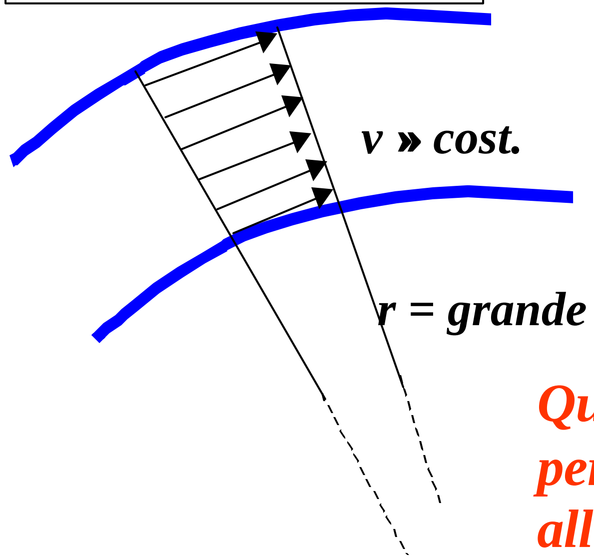
distribuzione di velocità uniforme

v* = *V

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

V= velocità media

<u>Traiettorie curvilinee:</u>



***se r è abbastanza* grande Þ la distribuzione di velocità si può ritenere » uniforme**

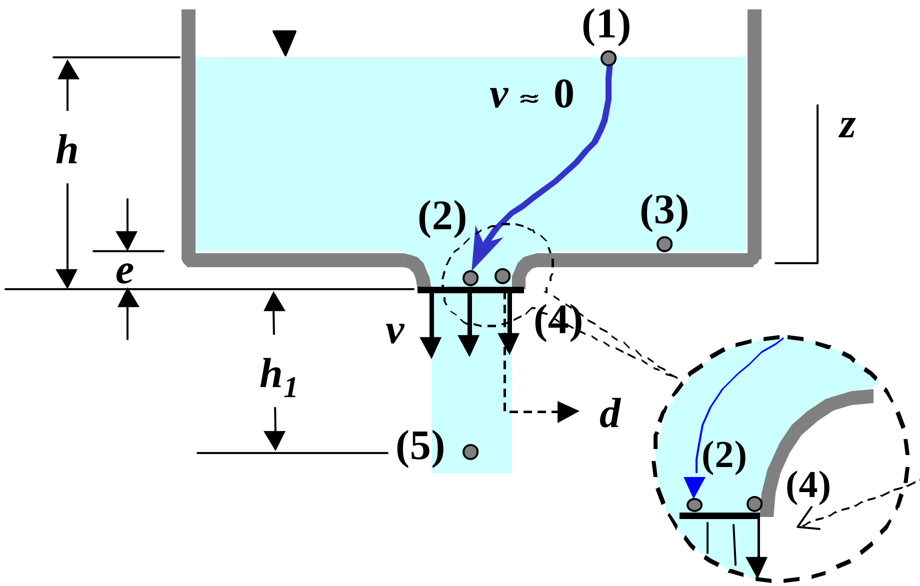
$$\frac{V^2}{2g} » \frac{v^2}{2g}$$

Quando vale l'ipotesi di correnti lineari o gradualmente variate per fluido ideale si può estendere li Th. di Bernoulli alle correnti !

$$H = z + \frac{p}{g} + \frac{V^2}{2g} = \cos t.$$

<u>Ipotesi</u>: **(1)** fluido ideale; **(2)** pesante; **(3)** incomprimibile; **(4)** moto permanente ; **(5)** <u>correnti lineari</u>

Applicazioni : Processi di efflusso



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Th. di Bernoulli
tra due punti su di una traiettoria

Pressione uguale a p_{atm}: traiettorie rettilinee $\rightarrow p_2 \equiv p_4$

***Fisicamente**: dal momento che non c'è componente della forza peso (o accelerazione) in direzione normale, la p è costante in quella direzione*

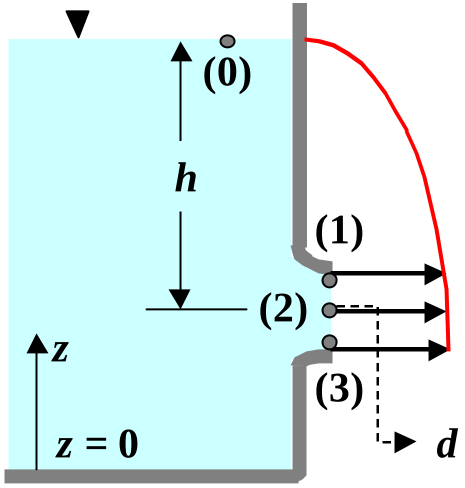
Tra (1) e (2): $h = v^2 / 2g$ $\Rightarrow$ $v = \sqrt{2\,g\,h}$ **TORRICELLI**

ottenibile anche scrivendo l'equazione di Bernoulli fra i punti (3) e (4) : $v_3 \approx 0$; $p_3 = \gamma\,(h - e)$

Tra (2) e (5) il fluido accelera: $v_5 = \sqrt{2\,g\,(h + h_1)}$

Tutta l'energia potenziale di una particella è convertita in energia cinetica

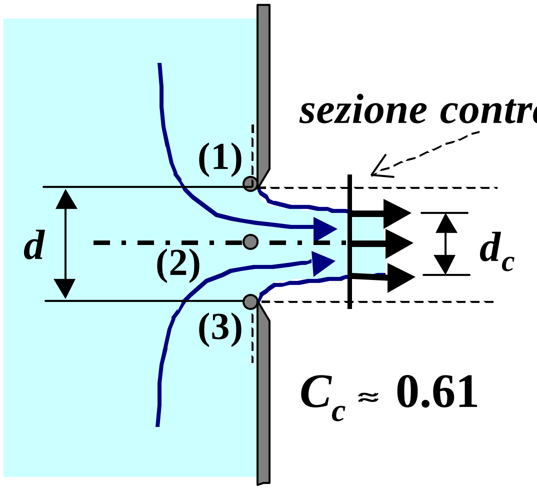
Problema: *L'area della sezione trasversale in (5) è maggiore, minore o uguale all'area trasversale nella sezione in (2)?*



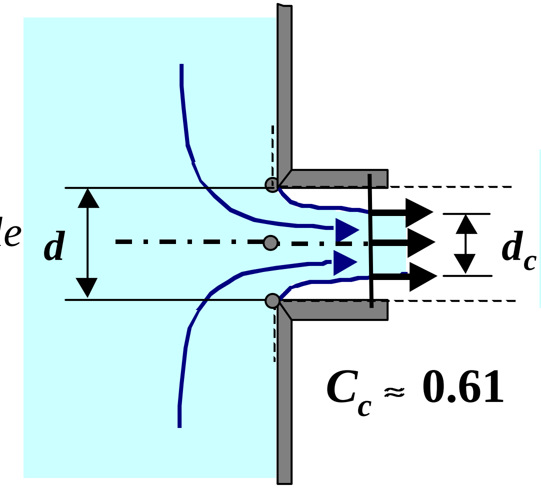
$d << h$ Þ la velocità del baricentro della vena è una ragionevole *velocità media*

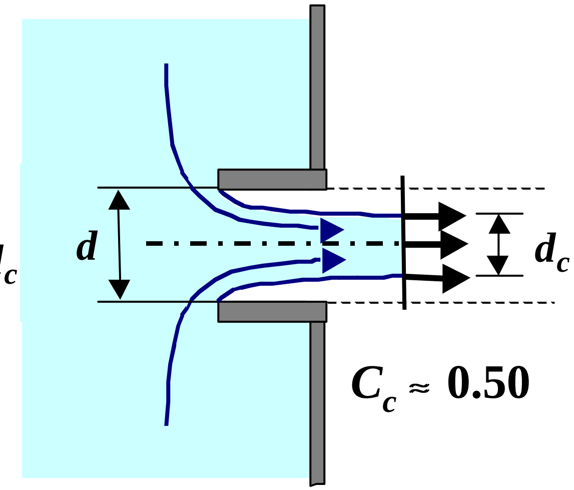
$$z_0 + \cancel{\frac{p_0}{\gamma}} + \cancel{\frac{v_0^2}{2g}} = z_2 + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2\,g\,(z_0 - z_2)} = \sqrt{2\,g\,h}$$

Efflussi con contrazione della vena



sezione contratta : *prima sez. in cui le traiettorie sono rettilinee e parallele (Þ distr. idrostatica delle pressioni) e in cui ho la max contrazione della vena fluida*





v_e = *velocità effettiva nella sez. contratta* $\quad v_e = 0.98 - 0.99\, v = C_v\sqrt{2\,g\,h}$ *con* C_v = *coeff. di velocità*

aera sez. contratta

$A_c = C_c\,A$; *con* C_c = *coefficiente di contrazione*

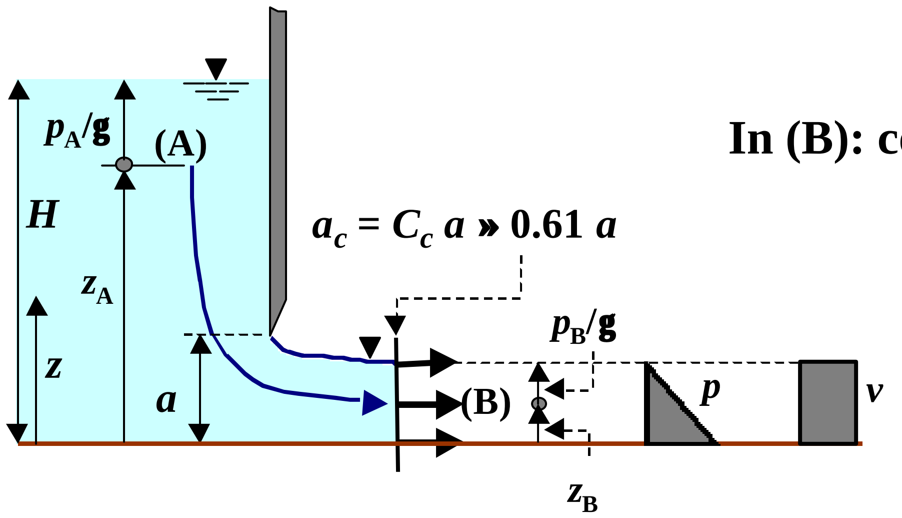
aera sez. di uscita

$$Q = A_c\,v_e = A_c\,C_v\sqrt{2\,g\,h} = A\,C_c\,C_v\sqrt{2\,g\,h}$$

$$Q = \mu\,A\sqrt{2\,g\,h}$$

$\mu = C_c\,C_v$ **(coefficiente di efflusso)**

Efflusso da paratoia



In (B): corrente gradualmente variata $\Rightarrow$ $z + p/\gamma$ = costante

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$v_B = \sqrt{2\, g\, (H - C_c\, a)}$$

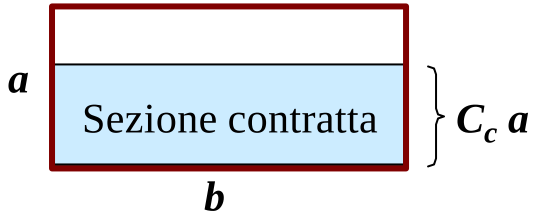
$$\boxed{C_c = 0.61 \ \ per \ \ 0 < a/H < 0.2}$$

$$v_e = C_v\, v_B \qquad A_c = C_c\, A = C_c\, a\, b$$

$$Q = A_c\, v_e$$

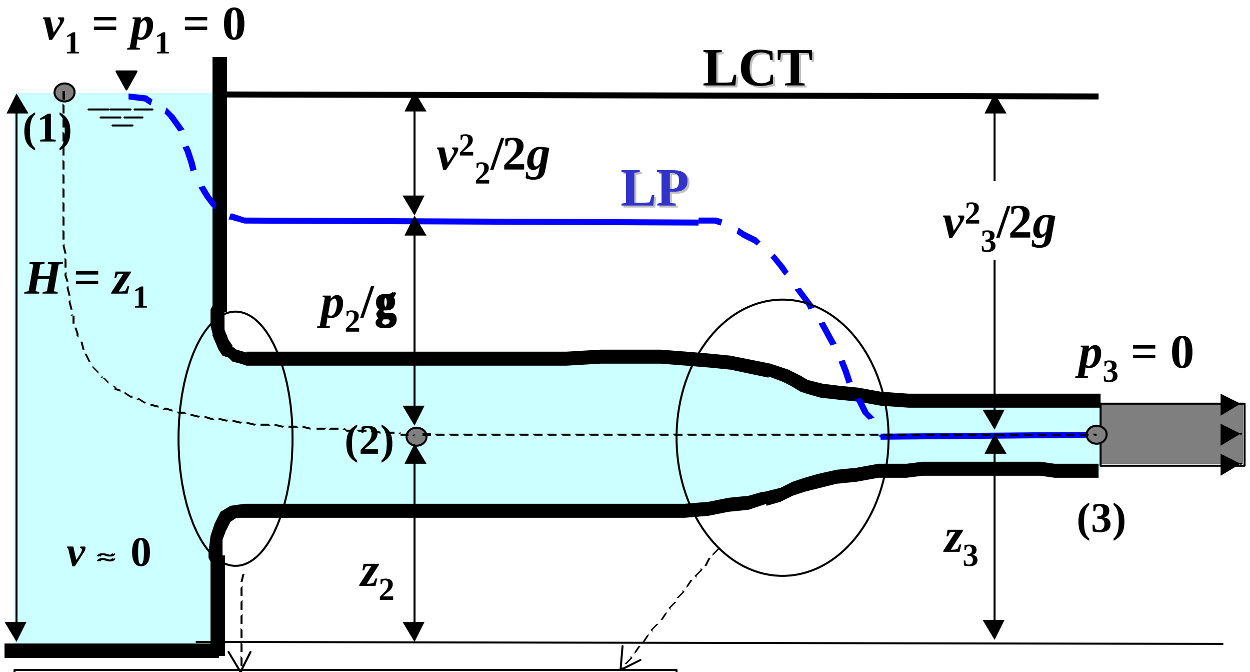
$$Q = \mu\, a\, b\, \sqrt{2\, g\, (H - C_c\, a)}$$

Sezione rettangolare



Nota: è interessante notare che $C_c \approx 0.61$ *anche per questa geometria;*

Hp: serbatoio di dimensioni infinite Þ $v \approx 0$ *e* H *=cost.*



in questi punti non è lecita l'ipotesi di correnti lineari Þ *non posso tracciare la LP (linea tratteggiata) ed applicare Bernulli esteso alle correnti*

Th. di Bernoulli tra il punto (1) e (2)

$$z_1 + \cancel{\frac{p_1}{g}} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} = z_2 + \overset{?}{\frac{p_2}{g}} + \frac{v_2^2}{2g}\ ?$$

ci sono troppe incognite!!

Th. di Bernoulli tra il punto (1) e (3)

$$z_1 + \cancel{\frac{p_1}{g}} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} = z_3 + \cancel{\frac{p_3}{g}} + \frac{v_3^2}{2g}\ ?$$

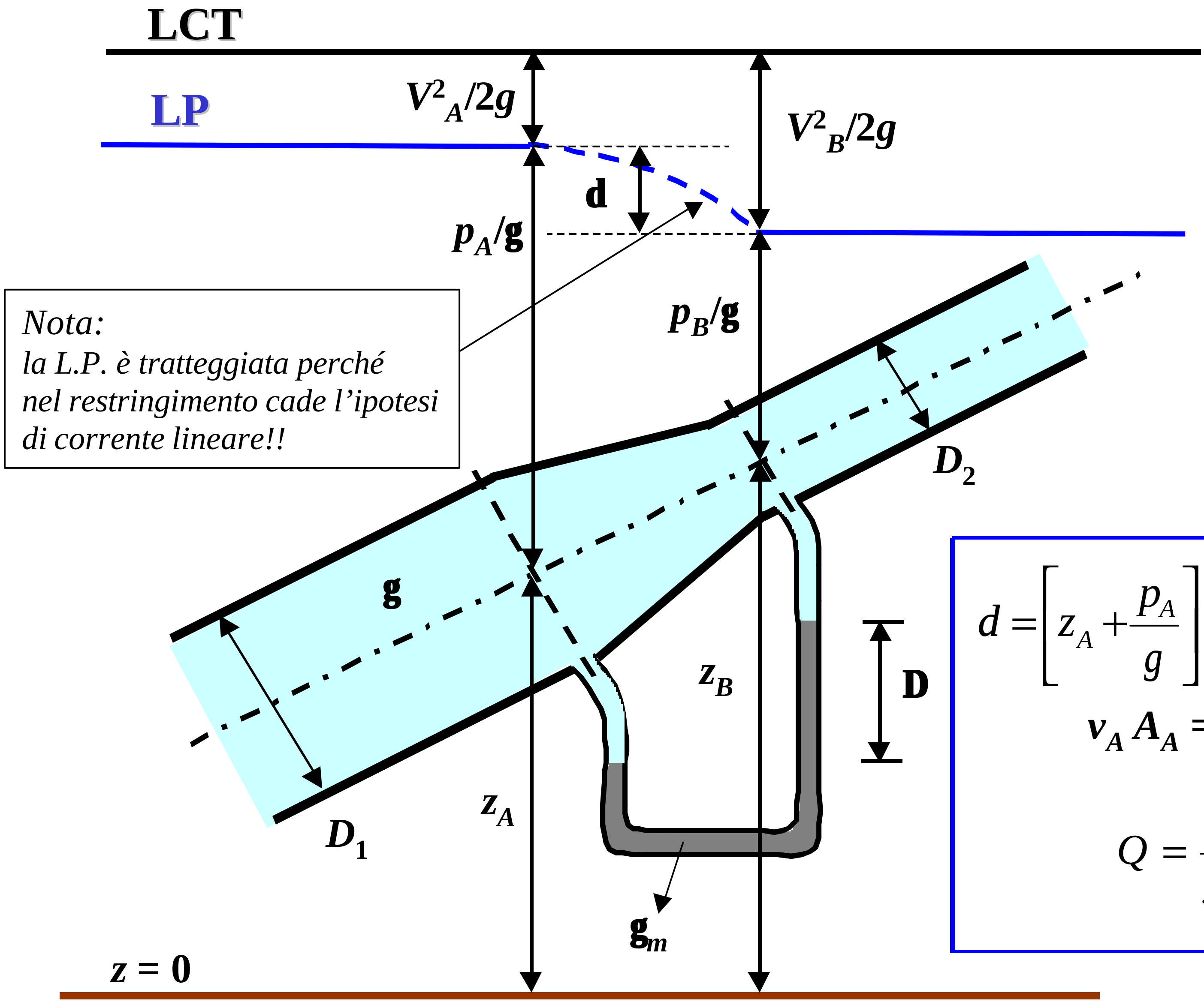
dove la corrente è lineare Þ **estensione di Bernoulli alle correnti**
Þ ***posso tracciare la LP***

$$z_1 + \cancel{\frac{p_1}{g}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = z_3 + \cancel{\frac{p_3}{g}} + \frac{V_3^2}{2g}\ ?$$

oppure

$$z_1 + \cancel{\frac{p_1}{g}} + \cancel{\frac{Q_1^2}{2gA_1^2}} = z_3 + \cancel{\frac{p_3}{g}} + \frac{Q_3^2}{2gA_3^2}\ ?$$

Venturimetro



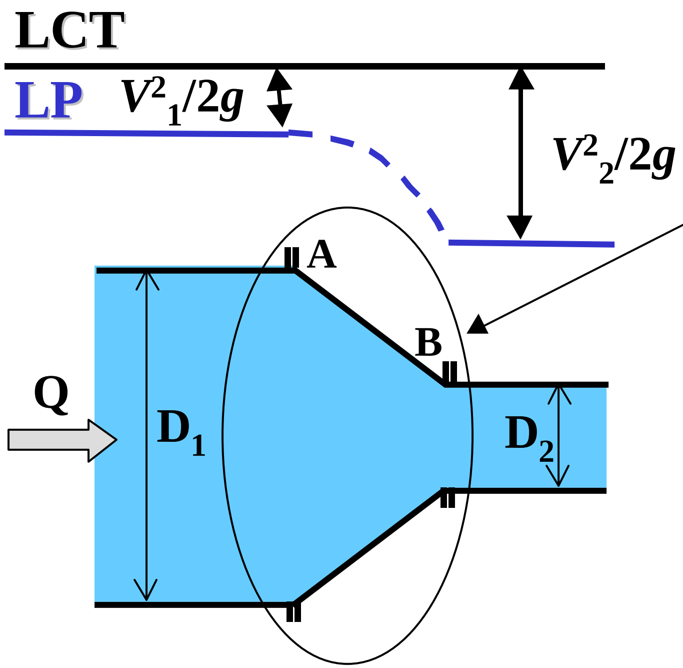
- **Teorema di Bernoulli esteso alle correnti per fluido ideale (V » v)**
- **Corrente lineare Þ piezometrica unica, convenzionalmente riferita all'asse e L.C.T. unica**

$$d = \left[z_A + \frac{p_A}{g}\right] - \left[z_B + \frac{p_B}{g}\right] = \frac{V_B^2 - V_A^2}{2g} = \Delta\frac{g_m - g}{g}$$

$$v_A\, A_A = v_B\, A_B = Q = \text{costante}$$

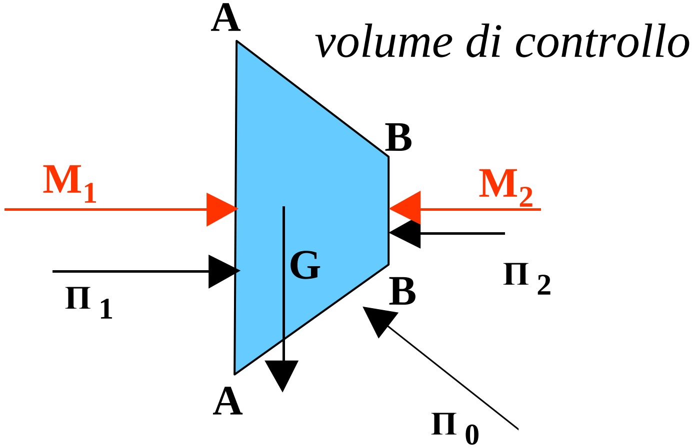
$$Q = \frac{A_A\ A_B}{\sqrt{A_A^2 - A_B^2}}\sqrt{2\,g\Delta\,\frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}$$

Spinte dinamiche



Calcolare la spinta che la corrente fluida esercita sul tratto di convergente tra le sezioni A e B

Equilibrio globale



HP:

(1) fluido ideale;
(2) pesante;
(3) incomprimibile;
(4) moto permanente
(5) correnti lineari

$\underline{\Pi}_0 + \underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2 + \underline{G} + \underline{M}_1 + \underline{M}_2 = 0$ $\quad\quad$ $\underline{S} = -\underline{\Pi}_0$ $\quad\quad$ $\underline{S} = \underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2 + \underline{G} + \underline{M}_1 + \underline{M}_2$

dove:

$\underline{\Pi}_0$ = **forza incognita**

$\underline{\Pi}_1$ **e** $\underline{\Pi}_2$ = **spinte statica sulle sup. AA e BB**

$\underline{G}$ = **forza di massa**

$\underline{M}_1$ **e** $\underline{M}_2$ = **flussi di quantità di moto sulle sup. AA e BB**
(quantità di moto nell'unità di tempo)

$\Pi_1 = \gamma\, h_A\, A_A$

$\Pi_2 = \gamma\, h_B\, A_B$

$G = \gamma\, W$

$M_1 = \rho\; Q\; V_1$

$M_2 = \rho\; Q\; V_2$

Nota:

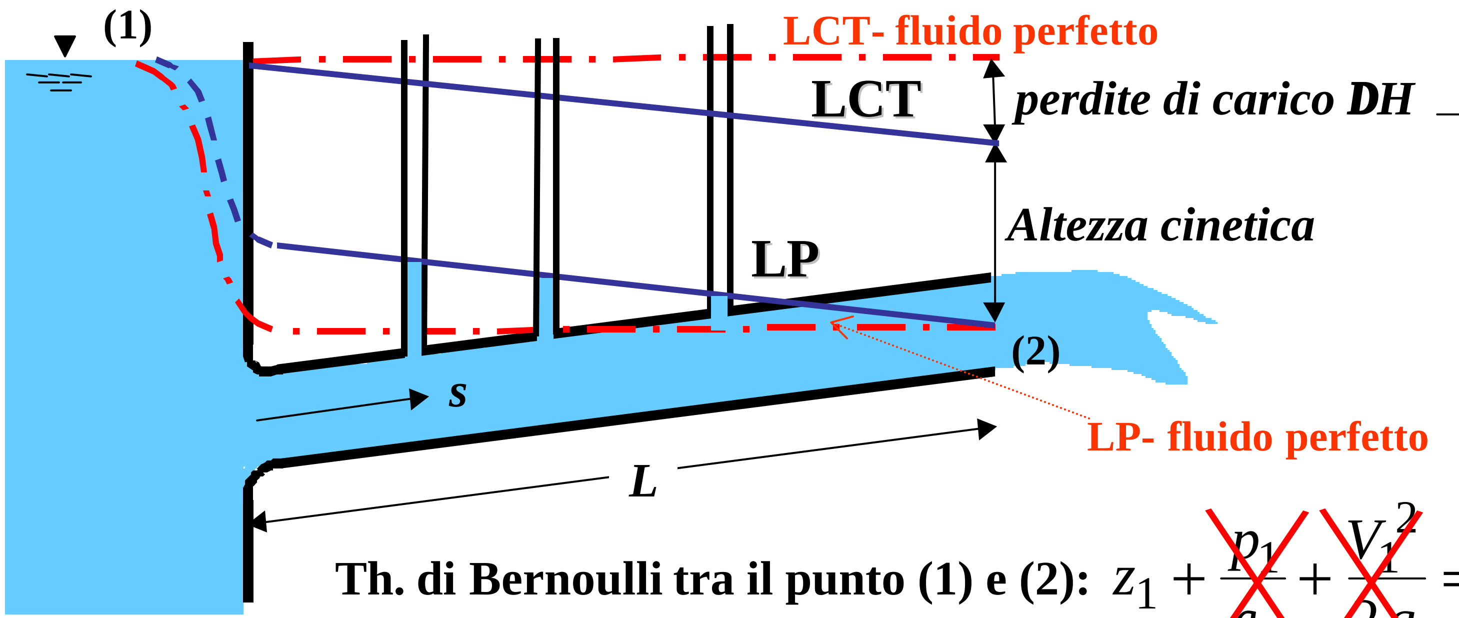
$\underline{V}$ *deve essere* $\perp$ alla sup.

$$\overline{M} = \int_A r \cdot \overline{v} \cdot v_n \cdot dA$$

Teorema di Bernoulli : estensione ai fluidi reali

Rinunciando all'ipotesi di fluido perfetto e quindi <u>*NON VISCOSO*</u> *il TH. di Bernoulli perde il suo significato principale, quello di esprimere la conservazione dell'energia meccanica.*

<u>fluido VISCOSO</u> $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\tau \neq 0}$ $\Rightarrow$ *il lavoro compiuto dagli sforzi tangenziali (resistenze al moto) costituisce dissipazione di energia meccanica*



non si conserva l'energia

Th. di Bernoulli tra il punto (1) e (2): $z_1 + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = z_2 + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H$

è ancora lecito riferirmi alla velocità media per il calcolo dell'altezza cinetica?

Ogni volta che estendo la validità di una formulazione devo ricontrollare le ipotesi di partenza !!

fluidi ideali → fluidi reali

Traiettoria (fluidi ideali)

(1) fluido ideale;
(2) pesante;
(3) incomprimibile;
(4) moto permanente

$$z + \frac{p}{g} + \frac{v^2}{2g} = \cos t.$$

Traiettoria (fluidi reali)

~~**(1)** fluido ideale;~~
(2) pesante;
(3) incomprimibile;
(4) moto permanente

$$z + \frac{p}{g} + \frac{v^2}{2g} + \Delta H = \cos t.$$

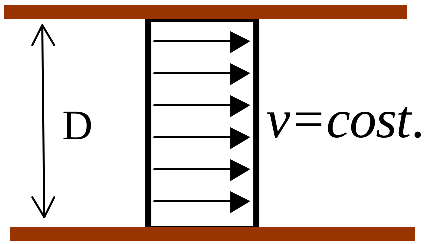
Se mi riferisco a una traiettoria, l'eliminazione dell'ipotesi (1) non sugli altri termini

Corrente (fluidi ideali)

(1) fluido ideale;
(2) pesante;
(3) incomprimibile;
(4) moto permanente
(5) correnti lineari

$$z + \frac{p}{g} + \frac{V^2}{2g} = \cos t.$$

$v=V$

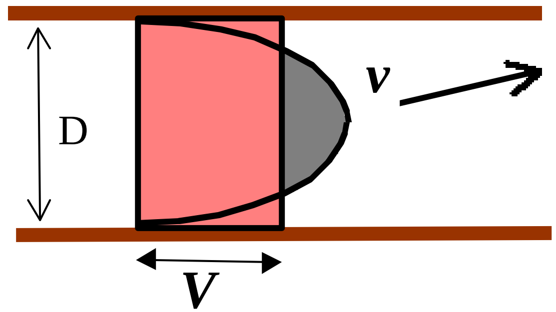


Corrente (fluidi reali)

~~**(1)** fluido ideale;~~
(2) pesante;
(3) incomprimibile;
(4) moto permanente
(5) correnti lineari

$$z + \frac{p}{g} + a\frac{V^2}{2g} + \Delta H = \cos t.$$

$v \neq V$

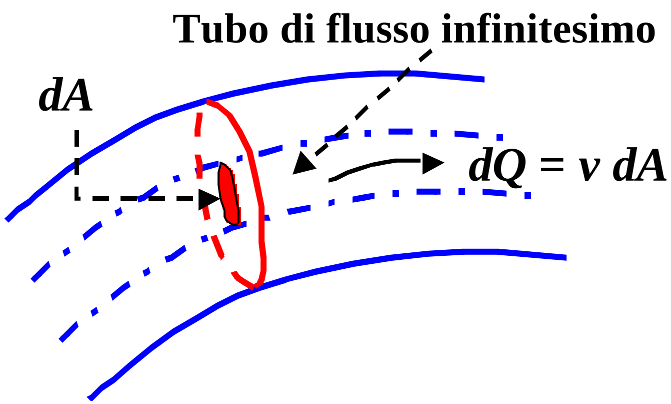


Se mi riferisco alle correnti, oltre alle perdite devo tenere conto della distribuzione di velocità che per effetto della viscosità avrò nella sezione sezione ⇒ in generale varierà il termine cinetico !!

Considerando una corrente, per estendere il Th. di Bernoulli ai fluidi reali dobbiamo discutere del <u>termine cinetico</u> e quello relativo alle <u>perdite di carico</u>

Coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche

dobbiamo introdurre il concetto di <u>POTENZA DI UNA CORRENTE</u>



***dP* = g *dQ H*; *dove H* = carico totale**

Per ogni tubo di flusso infinitesimo:

$$\begin{cases} H = \text{costante} \\ g\, dQ = \text{costante} \end{cases} \Rightarrow \quad dP = \text{costante}$$

per ottenere la potenza un una sezione devo integrare

$$P = \int_Q \gamma H\ dQ = \int_A \gamma H\ v\ dA = \gamma \int_A \left[z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right] v\ dA$$

$$= g \int_A \left[z + \frac{p}{g} \right] v\ dA + g \int_A \frac{v^2}{2g} v\ dA$$

per correnti lineari $z + \frac{p}{g} = \cos t.$

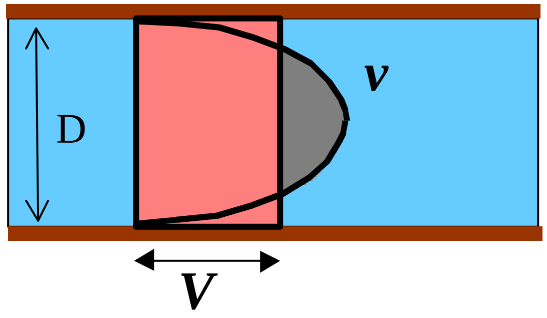
$$g \int_A \left[z + \frac{p}{g} \right] v\ dA = g \left[z + \frac{p}{g} \right] Q$$

Devo conoscere la distribuzione di velocità sulla sezione

La POTENZA DI UNA CORRENTE in una sezione dipende dalla distribuzione delle velocità nella sezione stessa

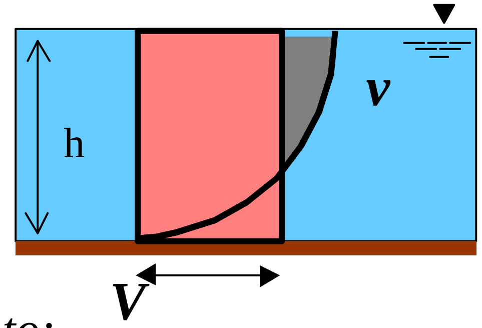
se per comodità voglio continuare a riferirmi alla velocità media devo introdurre un termine correttivo per la potenza cinetica

$$g \int_A \frac{v^2}{2g} v \, dA = a \; g \int_A \frac{V^2}{2g} V \; dA$$



$$a = \frac{\int_A v^3 \, dA}{V^3 A}$$

Coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche



Dalla definizione di potenza cinetica di una corrente nella sezione di riferimento:

$$P = g \underbrace{\left[z + \frac{p}{g} + a \; \frac{V^2}{2g} \right]}_{} Q = g \;\; H \quad Q$$

si ricava l'espressione del carico totale ***H*** *riferito alla velocità media della corrente nella sezione di interesse.*

a *dipende dalla distribuzione di velocità*