EQUAZIONI DI TRASFERIMENTO

Le equazioni di trasferimento si riferiscono al trasporto di calore o di materia tra un sistema ed un altro. Una equazione di trasferimento mette in relazione la grandezza oggetto del trasferimento (energia o massa) con le grandezze fisiche che la influenzano..
Ad esempio il trasferimento del calore tra due corpi dipende dalla loro differenza di temperatura e dalle caratteristiche costruttive (materiali, forma).
L'equazione di trasferimento è del tipo:

$$\text{Portata della grandezza trasferita} = \frac{\text{Forza spingente}}{\text{Resistenza al trasferimento}}$$

La forza spingente è la causa che determina il trasferimento (esempio la differenza di temperatura). La resistenza dipende dal mezzo attraverso cui avviene il trasferimento.
L'equazione vista è uguale a quella della legge di Ohm dove il valore della intensità della corrente è uguale al rapporto tra la differenza di potenziale diviso la resistenza del mezzo.

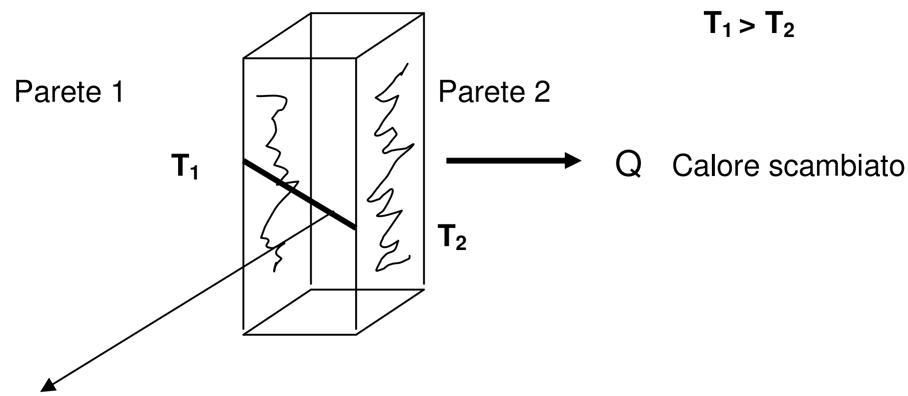
TRASFERIMENTO DEL CALORE.

Condizione indispensabile è che i due corpi abbiano diversa temperatura.
Lo studio del trasferimento si propone di descrivere quali grandezze influenzano lo scambio, così pure il ruolo della forma geometrica dei corpi interessati.
Il trasferimento del calore tra due corpi può avvenire per:

1) per CONDUZIONE;
2) per CONVEZIONE
3) per IRRAGGIAMENTO.

LA CONDUZIONE

Il meccanismo della conduzione non implica spostamento di materia. I metalli in genere sono buoni conduttori del calore e questo è da attribuire alla grande mobilità che hanno gli elettroni di muoversi nella materia.
Consideriamo il trasferimento del calore attraverso una superficie piana isolata dall'ambiente esterno.



Profilo della temperatura (rappresentazione grafica del valore della t°): da T_1 a T_2

L'equazione di trasferimento del calore per conduzione è l'equazione di Fourier:

$$Q = K \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{s}$$

- Q rappresenta la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo Kcal / h o W nell' S.I.
- K rappresenta la conducibilità termica del materiale in Kcal / h· m · °C. Capacità del materiale a condurre il calore.
- A è la superficie di scambio perpendicolare al Flusso. In m^2
- ΔT differenza di temperatura $T_1 - T_2$ in Kelvin.
- s è lo spessore in m.

Il rapporto $\frac{\Delta T}{s}$ è definito Gradiente termico

(che è la condizione sufficiente affinché si manifesti il trasferimento).

Il profilo della temperatura sarà tanto più inclinato in funzione della differenza di temperature tra le due facce.

Considerando la quantità di calore scambiato Q come rapporto tra una forza spingente e la resistenza si ha:

$$Q = \frac{\Delta T}{\frac{s}{K \cdot A}} \Rightarrow \frac{\text{forza spingente}}{\text{resistenza}}$$

Se la parete è composta da più materiali, considerando sempre il sistema isolato, a regime la quantità di calore che attraversa la parete 1 è uguale a quella della 2 e a quella della tre, cioè il trasferimento è da considerarsi un flusso.

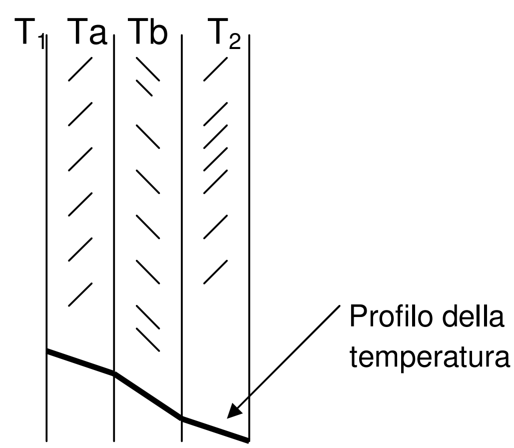
Cioè:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

$$Q_1 = K_1 \cdot A \cdot \frac{T_1 - Ta}{s_1}$$

$$Q_2 = K_2 \cdot A \cdot \frac{Ta - Tb}{s_2}$$

$$Q_3 = K_3 \cdot A \cdot \frac{Tb - T_2}{s_3}$$



Ricavando le differenze di temperature dalle tre equazioni si ha:

$$T_1 - Ta = \frac{Q \cdot s_1}{K_1 \cdot A} \; ; \quad Ta - Tb = \frac{Q \cdot s_2}{K_2 \cdot A} \; ; \quad Tb - T_2 = \frac{Q \cdot s_3}{K_3 \cdot A}$$

Sommando e semplificando viene :

$$T_1 - T_2 = \frac{Q}{A} \cdot \left(\frac{s_1}{K_1} + \frac{s_2}{K_2} + \frac{s_3}{K_3} \right)$$

Da cui :

$$Q = \frac{\Delta T}{\left(\frac{s_1}{K_1 A} + \frac{s_2}{K_2 A} + \frac{s_3}{K_3 A} \right)}$$

Interessante è il caso di conduzione attraverso una parete cilindrica cava (tubo).

Il tubo ha diametro interno r_i , superficie interna S_i , e all'esterno: r_e e S_e.

La lunghezza del tubo è L.

La superficie interna sarà:

$$S_i = 2\,\pi \cdot r_i \cdot L \qquad \text{e la } S_e = 2\,\pi \cdot r_e \cdot L$$

Si consideri T_i interna > di T_e esterna

In questo caso la superficie interna è minore di quella esterna pertanto è necessario adattare la formula di Fourier.Si può ovviare considerando lo spessore come somma di infinitesimi a cui si associa una differenza estremamente piccola di temperatura.
Il calcolo matematico ci permette di ricavare una formula adattabile al nostro caso:

$$Q = 2\,\pi \cdot K \cdot L \; \frac{\Delta T}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

LA CONVEZIONE

Il trasferimento del calore avviene a seguito di spostamento di massa (moti convettivi) .
Si può avere convezione naturale e forzata. E come moto può essere laminare o turbolento.
A stretto contatto con la parete è presente un film di liquido per il quale non si ha convezione ma si può considerare presente solo conduzione.
Il calore trasferito Q è uguale $= A \cdot h \cdot (t_2 - t_1)$

h rappresenta il coefficiente di trasferimento per convezione o coefficiente di pellicola.

Maggiore è la turbolenza maggiore è la quantità di calore trasferito.
A contatto della parete il moto è laminare poi si passa a turbolento.
Il coefficiente h dipende dalle proprietà fisiche del liquido e dalle condizioni operative (velocità, diametro e superficie)
Il valore dell'h, coefficiente di pellicola, non è di facile reperibilità.
Un metodo è l'analisi dimensionale. Il meccanismo consiste nell'individuare le grandezze che influenzano il fenomeno(temperatura, forma e dimensioni, velocità, cp,viscosità,densità, espansione termica ecc.). Si scrive poi l'equazione come h = funzione di (….). del tipo:

$$h = \Psi (\Delta t^a \cdot L^b \cdot Ve^c \cdot K^d \cdot Cp^e \cdot \rho^f \cdot \mu^g \cdot (\beta \cdot g)^h$$

cioè il coeff. Di pellicola è uguale ad una costante Ψ moltiplicata per le varie grandezze che influenzano il trasferimento, elevata ognuna ad un opportuno esponente.
β dipende dall'aumento di volume per grado Kelvin.
L'analisi dimensionale si basa sul principio di omogeneità tra il primo e il secondo membro.
Ne viene fuori una equazione dove figurano gruppi di quantità dimensionali.

Numero di Nusselt $= Nu = h \cdot \dfrac{L}{K} = \dfrac{\text{Calore complessivo scambiato}}{\text{Calore trasferito per conduzione.}}$

Numero di Reynolds $= Re = \dfrac{\rho \cdot vel \cdot L}{\mu} = \dfrac{\text{Quantità di moto con meccanismo turbolento}}{\text{Quantità di moto con meccanismo viscoso}}$

Numero di Prandtl $= Pr = \dfrac{Cp \cdot \mu}{K} = \dfrac{\text{Quantità di moto con meccanismo viscoso}}{\text{Calore trasferito per conduzione}}$

Numero di Grashov $= Gr = Re \dfrac{\beta \cdot g \cdot \Delta t \cdot L^3 \cdot \rho^2}{\mu^2} = \dfrac{\text{Forza ascensionale}}{\text{Forza viscosa}}$

Si può scrivere $Nu = \Psi \cdot (Re^{\alpha} \cdot Pr^{\beta} \cdot Gr^{\gamma})$

Dove $\Psi, \alpha, \beta, \gamma$ assumono valori dipendenti dalle caratteristiche del sistema.
Prove sperimentali hanno dimostrato che il numero di Gr non ha influenza nella convezione forzata, mentre Re non ha influenza nella convezione naturale.

Convezione forzata: $Nu = \Psi \cdot (Re^{\alpha} \cdot Pr^{\beta})$

Convezione naturale: $Nu = \Psi \cdot (Pr^{\beta} \cdot Gr^{\gamma})$

Quindi per la <u>convezione forzata</u> possiamo scrivere: $$h = \Psi \frac{K}{L} \cdot \left(\frac{\rho \cdot vel \cdot L}{\mu}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{Cp \cdot \mu}{K}\right)^{\beta}$$

<u>Convezione naturale</u>: $$h = \Psi \frac{K}{L} \cdot \left(\frac{Cp \cdot \mu}{K}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{\beta \cdot g \cdot \Delta t \cdot L^3 \cdot \rho^2}{\mu^2}\right)^{\gamma}$$

<u>Vediamo alcuni casi particolari</u>:

1) <u>Convezione forzata</u> entro tubi <u>turbolento</u> $$h = 0{,}027 \frac{K}{D} \left(\frac{\rho \cdot vel \cdot D}{\mu}\right)^{0,8} \cdot \left(\frac{Cp \cdot \mu}{K}\right)^{0,33} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_P}\right)^{0,14}$$

Dove D è il diametro e μ_P la viscosità alla t° della parete.

Mentre per <u>laminare</u> $$h = 1{,}86 \frac{K}{D} \left(\frac{\rho \cdot vel \cdot D}{\mu}\right)^{0,33} \cdot \left(\frac{Cp \cdot \mu}{K}\right)^{0,33} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_P}\right)^{0,14} \cdot \left(\frac{D}{l}\right)^{0,33}$$

2) <u>Convezione naturale</u>

Vediamo alcuni casi :

- <u>Pareti solide immerse in aria</u>

-<u>Cilindri orizzontali</u> $h = 3{,}58 \cdot \left(\frac{\Delta t}{D}\right)^{1/4}$

-<u>Piani verticali</u> $h = 3{,}72 \cdot \left(\frac{\Delta t}{L}\right)^{1/4}$

<u>Piani orizzontali faccia superiore</u>: $h = 2{,}149 \cdot \Delta t^{1/4}$

<u>Piani orizzontali faccia inferiore</u> : $h = 1{,}131 \cdot \Delta t^{1/4}$

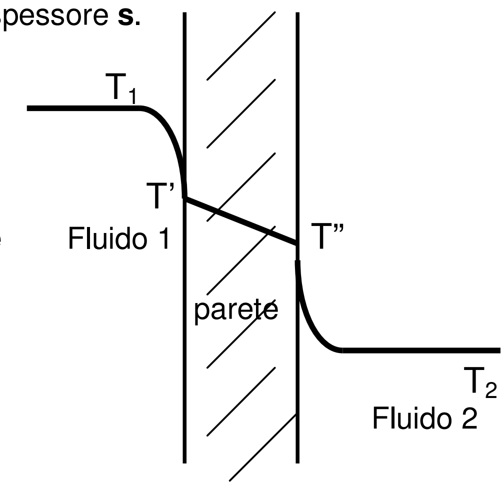
- <u>Pareti solide immerse in acqua</u>

-<u>Cilindri orizzontali</u> $h = 62{,}87 \cdot \left(\dfrac{\Delta t}{D} \right)^{1/4}$

-<u>Piani verticali</u> $h = 345{,}47 \cdot \left(\dfrac{\Delta t}{L} \right)^{1/4}$

Le temperature sono in gradi C° .

Consideriamo il caso della trasmissione del calore attraverso una parete (conduzione) a contatto con due fluidi a temperature diverse. E' praticamente il caso di una parete esterna di un appartamento a contatto con l'ambiente interno e con l'esterno.
La parete avrà una propria conducibilità **K** e spessore **s**.
In regime stazionario il flusso del calore che attraversa la parete è unico, per cui il calore trasferito dal fluido 1 alla parete per convezione ,quello che attraversa la parete per conduzione e quello che viene trasferito dalla pare al fluido 2 per convezione sono uguali: $\mathbf{Q = Q_1 = Q_2 = Q_3}$



Analizziamo i tre casi:

1) da fluido 1 a parete : convezione $Q = h_1 \cdot A\,(T_1 - T')$

2) attraverso la parete : conduzione $Q = \dfrac{K \cdot A\,(T' - T'')}{s}$

3) da parete a fluido 2 : convezione $Q = h_2 \cdot A\,(T'' - T_2)$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{Q}{A} \left[\frac{1}{h_1} + \frac{s}{K} + \frac{1}{h_2} \right]$$

A contatto della parete si ha moto laminare poi attraverso una zona di transizione si passa a nettamente turbolento. Si passa quindi da trasmissione per conduzione a convezione. Quanto maggiore è la turbolenza tanto più grande è la quantità di calore che il fluido è in grado di trasmettere.

Il coefficiente di convezione o di pellicola h dipende, come visto, dalle proprietà fisiche del fluido e dalle condizioni operative: diametro, velocità, superficie, viscosità, densità ecc. Nel caso di un tubo contenente un fluido 1 a contatto all'esterno con un fluido 2, si procede come nel caso precedente considerando però per il tubo la superficie curva. Il flusso di calore sarà unico: $\mathbf{Q = Q_1 = Q_2 = Q_3}$

Le formule sono scritte come rapporto tra forza spingente e resistenza.

1) Convezione interna: $$Q = \frac{(T_i - T')}{\dfrac{1}{h_i \cdot A_i}}$$

2) conduzione parete curva: $$Q = \frac{(T' - T'')}{\dfrac{\ln \dfrac{D_e}{D_i}}{2\pi \cdot K \cdot L}}$$

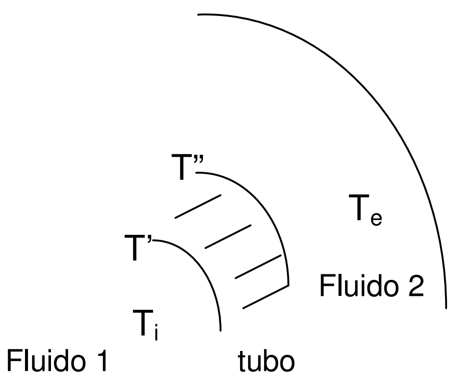
3) Convezione esterna: $$Q = \frac{(T'' - T_e)}{\dfrac{1}{h_e \cdot A_e}}$$

Globalmente

$$Q = \frac{T_i - T_e}{\dfrac{1}{h_i \cdot A_i} + \dfrac{\ln \dfrac{D_e}{D_i}}{2\,\pi \cdot K \cdot L} + \dfrac{1}{h_e \cdot A_e}}$$

Il denominatore rappresenta la resistenza complessiva allo scambio termico.

T_i temperatura fluido 1
T' temperatura parete interna del tubo
T" temperatura parete esterna del tubo
T_e temperatura fluido e



Nel caso di tubo metallico buon conduttore la resistenza dovuta alla parete del tubo è trascurabile e nell'equazione globale di scambio si può omettere il termine relativo alla conduzione. E' come se le due temperature T' – T" avessero lo stesso valore. Cioè il calore passa tutto senza trovare resistenza.