IMPORTANZA DELL INCERTEZZE NELLE MISURE FISICHE

Nell'ambito delle scienze sperimentali la parola *errore* non ha la tradizionale connotazione di *equivoco* o di *sbaglio*, bensì assume il significato di **incertezza** intesa come quell'entità di cui sono affette inevitabilmente tutte le misure.

Infatti, se si potessero trattare le incertezze sperimentali alla stregua di veri e propri errori, basterebbe agire sulle fonti di questi o sforzarsi di operare nel modo più accurato possibile per eliminarli, mentre è inevitabile che esse siano presenti nel processo di misura.

Da questa premessa dobbiamo allora concludere che tutto quello che eseguiamo all'atto della misura e affetto da errore?

Se così è, che significatività possiamo attribuire ai nostri risultati?

Ovviamente i risultati che otteniamo non possono essere assunti come certezze assolute, nè si possono sfruttare per ottenere previsioni corrette al 100%. Nonostante tutto, entro i limiti di validità dei nostri dati (limiti dati appunto dagli errori ad essi associati), possiamo ugualmente fare delle previsioni sull'evolversi dei fenomeni che stiamo studiando.

Si noti comunque che l'intervallo di validità, determinato dalle incertezze sperimentali, non fissa una linea di demarcazione netta tra quello che è il risultato corretto sul quale costruire le nostre congetture e quello che invece può essere un valore completamente inconsistente: diciamo che all'interno del cosiddetto *intervallo di confidenza* siamo "più sicuri" che altrove di avere inglobato quello che è il valore effettivo della grandezza che misuriamo.

In definitiva cercare di ottenere una stima quantomeno realistica della loro consistenza e, per quanto possibile, sforzarsi di ridurle ad un limite ragionevole è quanto di meglio si possa compiere in una "corretta analisi" delle incertezze sperimentali.

Il significato delle virgolette è da ricercarsi nel fatto che l'analisi degli incertezze non costituisce una vera e propria *teoria* degli errori (come a volte si trova scritto impropriamente su alcuni testi più o meno scientificamente accreditati), bensì dovrebbe limitarsi a dare alcune linee guida fondamentali per l'analisi e il trattamento dei dati sperimentali.

IMPOSSIBILITÀ DI OTTENERE MISURE FISICHE PRIVE DI INCERTEZZE

Relativamente al "valore vero" bisogna specificare che esiste un problema di ***definizione*** del concetto stesso.

Se ad esempio supponiamo di voler misurare la lunghezza di un tavolo con una precisione sempre maggiore arriveremo ben presto a renderci conto che non esiste la grandezza "lunghezza del tavolo". Infatti, all'aumentare della precisione, noteremmo che la misura della lunghezza: varia da punto a punto a causa di piccole asperità del bordo del tavolo, si differenzia a diversi intervalli di tempo per la dilatazione o la contrazione dovuta agli sbalzi termici e via dicendo... L'esempio mostrato illustra, in definitiva, il seguente fatto: *nessuna quantità fisica può essere misurata con completa certezza.*

Pur sforzandoci di operare con la massima cura non riusciremo mai ad eliminare totalmente le incertezze. Potremo solo ridurle fino a che non siano estremamente piccole, ma mai nulle.

Da questo si capisce il perchè dell'affermazione "non esiste la grandezza lunghezza del tavolo" intesa come valore vero. Ogni grandezza definita dalle operazioni sperimentali che si svolgono e dalle regole che si applicano per ottenere la misura. Il fatto di non poter eliminare del tutto le incertezze e, al di sopra di una certa soglia di precisione, trovare, al ripetere della misura, valori diversi, nega l'esistenza di tale grandezza.

Per capire meglio, il valore vero sarebbe il risultato di operazione di misura ideale, priva di errore. Tale misura, nella realtà, è irrealizzabile. Pertanto anche il relativo risultato, il valore vero, perde di significato.
Infatti, come nella realtà affermiamo che qualcosa esiste solo nel momento in cui i nostri sensi sono in grado di determinarne la presenza, così, nel caso delle misure, noi possiamo affermare che la grandezza "lunghezza della porta" esiste solo quando siamo in grado di definirla esattamente. La presenza inevitabile di incertezze nella misura elimina automaticamente la possibilità di determinare esattamente tale grandezza.

IL DETERMINISMO

L'ideale deterministico, tipico della cultura dell'era newtoniana, fu generalizzato in modo formale da Laplace nell'introduzione della sua opera *"Essai philosophique sur les probabilites"*.

Secondo il determinismo, ogni fenomeno della natura doveva essere considerato nell'ambito di una logica rigorosa, connessa al presupposto che ogni evento fosse ricollegabile ad una causa che lo provocava.
Indotti da questo formalismo, molti scienziati erano convinti che una volta conosciuto lo stato iniziale di un sistema e le forze agenti su di esso fosse possibile determinare, istante per istante, l'evolversi del sistema applicando le leggi della meccanica di Newton.

La "fiducia" nelle potenzialità della scienza e della ricerca derivavano in larga misura dal ritenere concettualmente possibile conoscere la posizione e la velocità istantanea di tutte le componenti dell'universo. Si pensava cioè che fosse possibile, almeno in via di principio, affinare le tecniche e i metodi di misura in modo da far scomparire definitivamente le indeterminazioni sui valori misurati.

Le caratteristiche degli strumenti di misura

- Ripetibilità
- Prontezza
- Sensibilità
- Risoluzione
- Fondo scala
- Precisione

Oltre a queste caratteristiche esistono altri fattori tra cui il costo, l'ingombro e il peso che contraddistinguono lo strumento. Si noti peraltro che le varie caratteristiche non sono indipendenti l'una dall'altra, ma costituiscono il risultato di un compromesso che si raggiunge all'atto della progettazione.
Come esempio si consideri il fatto che il costo di uno strumento può salire notevolmente all'aumentare dell'intervallo di funzionamento e non è detto che le due grandezze, costo e intervallo di funzionamento, siano correlate linearmente: anzi molto spesso ad un piccolo ampliamento delle caratteristiche (precisione, intervallo di funzionamento e così via) corrisponde un aumento dei costi ben superiore ai miglioramenti apportati.

LA RIPETIBILITA`

Con il termine ripetibilità si intende la capacità dello strumento di fornire misure uguali della stessa grandezza entro la sua <u>risoluzione</u>, anche in condizioni di lavoro difficili o variabili (vibrazioni, sbalzi di temperatura, ...).

In pratica lo strumento deve risultare ben isolato rispetto agli effetti dell'ambiente esterno, escluso ovviamente l'effetto dovuto alla grandezza in esame.

La ripetibilità implica anche una buona **affidabilità,** intesa come robustezza di funzionamento nel tempo. Questa peculiarità viene espressa come *vita media* o come *tempo medio* statisticamente prevedibile fra due guasti successivi in condizioni normali di utilizzo.

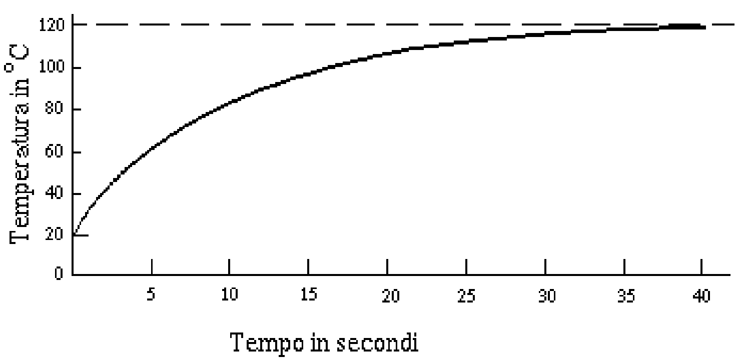
LA PRONTEZZA

La prontezza è una caratteristica dello strumento legata al tempo necessario affinchè questo risponda ad una variazione della grandezza in esame. Per alcuni strumenti, quanto minore è questo tempo, detto *tempo caratteristico*, tanto maggiore è la prontezza, mentre per altri la prontezza è rappresentata dal tempo impegato dallo strumento per dare la risposta, cioè il risultato. In generale la prontezza rappresenta *la rapidità con cui è lo strumento è in grado di fornire il risultato di una misura.*

Per chiarire quanto detto finora vediamo un esempio: consideriamo un termometro a mercurio, quello che si può trovare in un comune laboratorio, che sia inizialmente alla temperatura ambiente di 20^{o}C.

Se ora lo immergiamo in un bagno di liquido alla temperatura di 120^{o}C osserviamo che il mercurio comincia a salire lungo la scala prima velocemente poi più lentamente fino ad arrivare al valore di temperatura corrispondente: approssimativamente il tempo impiegato affinchè il mercurio raggiunga la posizione relativa alla temperatura misurata è dell'ordine di qualche decina di secondi (diciamo 40).

Questo intervallo di tempo ci da un'indicazione sulla prontezza dello strumento. In particolare, se andiamo ad osservare l'andamento della temperatura misurata graficata rispetto al tempo, il fenomeno descritto appare ancora più chiaro.



C'è anche chi definisce la prontezza come il tempo impiegato dall'indice dello strumento (nel nostro caso il livello della colonnina di mercurio) ad effettuare il 63.2 % dell'escursione che esso deve compiere, partendo dalla posizione iniziale di riposo fino a raggiungere il valore effettivo della grandezza.

Tale tempo è definito come *coefficiente di ritardo*.

Attraverso questa definizione si potrebbe avere un coefficiente di ritardo variabile con il valore della grandezza applicata. Per ovviare a questo inconveniente occorre fissare un valore di riferimento della grandezza, le modalità d'uso e tutte le altre caratteristiche strumentali, in modo tale che la prontezza così definita rispecchi un'effettiva caratteristica dell'apparecchio.

LA SENSIBILITA`

La **sensibilità** di uno strumento è costituita dalla più piccola grandezza in grado di generare uno spostamento apprezzabile rispetto all'inizio della scala dello strumento.
Così definita, la sensibilità determina il limite inferiore del campo di misura dello strumento, mentre il limite superiore è dato dal fondo scala: i due determinano insieme l'*intervallo di funzionamento*.

LA RISOLUZIONE

La risoluzione di uno strumento rappresenta la minima variazione apprezzabile della grandezza in esame attraverso *tutto* il campo di misura: essa rappresenta il valore dell'ultima cifra significativa ottenibile.
Percui se la scala dello strumento parte da zero ed è lineare la risoluzione è costante lungo tutto il campo di misura e risulta numericamente uguale alla sensibilità.

Si osservi che non sempre sensibilità e risoluzione coincidono: la loro differenza risiede nella definizione delle due grandezze. Infatti la sensibilità è relativa all'inizio del campo di misura, mentre la risoluzione è considerata sull'intero campo di misura dello strumento.

IL FONDO SCALA

Il fondo scala rappresenta il limite superiore del campo di misura e prende anche il nome di *portata* dello strumento: insieme alla sensibilità ne delimita l'*intervallo di funzionamento*.

LA PRECISIONE

Come abbiamo già detto, ad ogni misura è associata inevitabilmente una incertezza. Evidentemente più piccola è l'incertezza associata alla misura, migliore sarà la misura.
Ma cosa significa "più piccola"?

Vediamo di chiarire questo punto. Quando noi forniamo un risultato, lo dobbiamo sempre corredare, oltre che del valore della misura, anche dell'errore associato: tale errore è detto *errore assoluto* e rappresenta l'intervallo di indeterminazione entro il quale si suppone che il risultato sia compreso.
Se ora cosideriamo il rapporto tra l'errore assoluto e il risultato stesso otteniamo una grandezza adimensionale (un numero, privo cioè di unità di misura), molto utile nell'analisi degli errori, che prende il nome di **precisione** o errore relativo.

A questo punto appare evidente che la misura con l'errore relativo minore è quella più precisa: si noti bene che si è parlato di errore relativo e non assoluto. Infatti si consideri il seguente esempio.

Siano date due misure nel modo seguente

$$A=(10 \pm 1)\ Kg$$

$$B=(100 \pm 1)\ Kg$$

Entrambe hanno lo *stesso errore assoluto* ($\Delta A=\Delta B=1$ Kg), mentre hanno *differenti errori relativi*. Ora, mentre nella prima misura abbiamo un errore di una unità su dieci, nella seconda abbiamo un errore di una sola unità su cento: si è allora soliti dire che la prima è una misura *precisa al 10%*, mentre la seconda *precisa al 1%*.

Precisioni di questo ordine di grandezza sono molto simili a quelle che si possono ottenere in un laboratorio di fisica o di chimica: si tenga però conto che i laboratori di ricerca le precisioni raggiunte sono di parecchi ordini di grandezza superiori. Per questo si è soliti usare la notazione scientifica, onde evitare la scomodità di espressioni con troppi zeri.

COMPONENTI FONDAMENTALI DEGLI STRUMENTI DI MISURA

- Elemento rivelatore
- Trasduttore
- Dispositivo per la visualizzazione

ELEMENTO RIVELATORE

L'elemento rivelatore dello strumento è costituito da un apparato sensibile alla grandezza da misurare: in un termometro a mercurio, ad esempio, l'elemento sensibile è rappresentato dal mercurio.
In generale l'elemento rivelatore interagisce con la grandezza in esame e, come avviene per il mercurio, può venire modificato nella forma o in un'altra caratteristica. Altre volte invece è l'elemento stesso che, interagendo con la grandezza in esame, la modifica, creando non pochi problemi allo sperimentatore che deve accorgersi della modifica introdotta e di conseguenza cercare di eliminarla o stimarla per ottenere una misura corretta.

TRASDUTTORE

Il trasduttore è quella parte dello strumento atta a trasformare l'informazione ottenuta dal rivelatore in una grandezza di più facile utilizzazione da parte dello sperimentatore. Il trasduttore in genere agisce sulla grandezza di partenza trasformandola in una di un'altra specie: nel caso di un oscilloscopio il trasduttore è costituito dalle placchette di deflessione del fascio di elettroni, mentre per gli strumenti digitali, tale componente è rappresentato dal convertitore analogico-digitale.

DISPOSITIVO DI VISUALIZZAZIONE

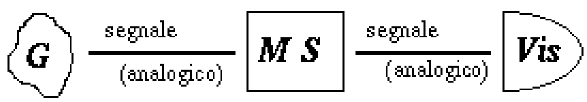
Questo componente ha la scopo di fornire visivamente o graficamente il risultato della misura sintetizzando così le operazioni svolte dal rivelatore e dal trasduttore.
Ad esempio, sono dispositivi di visualizzazione lo schermo per un'oscilloscopio, l'insieme dell'ago e della scala graduata per un generico strumento ad ago mentre per gli strumenti di tipo digitale è costituito dal display numerico.

GLI STRUMENTI DI MISURA ANALOGICI

La caratteristica primaria di uno strumento analogico, che lo differenzia da uno digitale, è il fatto che in esso è assente la fase di digitalizzazione del segnale in ingresso. Infatti, secondo la definizione in ambito tecnico della parola, con "analogico" si intende un *dispositivo operante su grandezze fisiche elettriche, meccaniche o di altra natura che rappresentano, per* ***analogia****, le grandezze caratteristiche del sistema studiato*, ossia *mettono in relazione due fenomeni fisici di natura diversa in modo che le grandezze relative all'uno e all'altro siano legate da equazioni identiche.* In questo modo si possono studiare fenomeni complessi su modelli costituiti da fenomeni più semplici.

In pratica negli strumenti analogici non avviene la conversione del segnale in ingresso, ma questo viene studiato così com'è, sfruttando fenomeni e meccanismi interni allo strumento, analoghi alla natura del segnale.

Se volessimo riassumere lo schema di uno strumento analogico avremmo:



dove con ***G*** si intende la grandezza misurata, con ***M S*** i generici meccanismi interni dello strumento e con ***Vis*** il dispositivo di visualizzazione dello strumento: in genere, un indice mobile su una scala graduata.

GLI STRUMENTI DI MISURA DIGITALI

Per alcuni, la caratteristica principale che differenzia gli strumenti di tipo digitale da quelli analogici, è la presenza di un display a cristalli liquidi sul quale viene riprodotto il risultato come una sequenza di cifre.

In effetti, anche nel linguaggio di tutti i giorni, l'appellativo digitale spetta a tutti quei dispositivi che hanno un display a cristalli liquidi, mentre per analogico in genere si intende tutto ciò che è "a lancette". Questa distinzione, pur non essendo del tutto errata, è abbastanza riduttiva, poichè non fa luce sulle differenze concettuali e di funzionamento dei due tipi i strumenti.

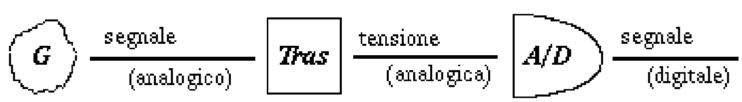
Fondamentalmente uno strumento digitale compie le segunti operazioni:

- in ingresso legge un segnale, di tipo analogico, omogeneo alla grandezza osservata

- il trasduttore prende questo segnale e lo trasforma in una tensione, grandezza elettrica ed ancora analogica

- il segnale elettrico va al convertitore anologico-digitale che trasforma la tensione in ingresso in un segnale digitale.

I passi elencati si possono riassumere attraverso il seguente schema:



Una volta trasformato il segnale in ingresso da analogico a digitale lo strumento lo analizza a visualizza sul display il corrispondente risultato.

Vediamo in dettaglio come avvengono le due fasi principali appena citate e cioè come funziona un convertitore analogico-digitale e come viene elaborata l'informazione fornita da questo per ottenere il risultato visualizzato sul display.

LE MISURE
Introduzione

Il metodo di indagine sperimentale privilegiato per lo studio dei fenomeni naturali è quello sperimentale, applicato per la prima volta da Galileo Galilei (1564 - 1642).
Questo metodo si propone, dopo un'accurata osservazione, di riprodurre in condizioni semplificate e controllabili i processi che avvengono spontaneamente in natura: dopodichè si cerca di isolarne ogni singolo aspetto studiando l'influenza che questo ha sul fenomeno osservato.
Una volta individuati i fattori determinanti, si procede alle dovute valutazioni quantitative atte a sfociare nella formulazione matematica di una o più leggi.

Alla base di questo discorso risiedono due elementi fondamentali:

- La riproducibilità degli esperimenti
- La precisione delle misure

L'importanza della riproducibilità delle misure si intiusce immediatamente dal fatto che per poter studiare l'apporto dei singoli fattori bisogna poter ripetere le misurazioni dopo aver variato alcuni parametri del sistema e vedere quanto la variazione apportata incida sull'evolversi del fenomeno.
Ne segue, ed è il secondo punto, che l'affidabilità delle misure influenza notevomente la qualità delle deduzioni che possiamo ricavare da un siffatto studio dei fenomeni: questo è dovuto al fatto che il campo di validità delle nostre previsioni, dedotte dall'osservazione sperimentale, è limitato dalla precisione con la quale effettuiamo le misure stesse.

La verifica degli strumenti

Nel momento in cui si osserva un fenomeno che può essere difficilmente riprodotto le uniche fluttuazioni nelle misure alle quali bisogna prestare attenzione sono quelle legate all'apparato sperimentale.
Da questo discende immediatamente che l'affidabilità degli strumenti usati deve essere verificata attentamente prima di procedere al prelievo delle misure, operando in condizioni il più possibile simili a quelle reali dell'esperimento e, ovviamente, eseguendo misure su una grandezza omogenea a quella che è oggetto di studio.
Una volta verificati gli strumenti operando come sopra, si procede alla misurazione vera e propria agendo con la massima attenzione e nel modo più preciso possibile in quanto potremo raccogliere un'unico dato. Essendo il dato uno solo, non avrà senso parlare di statistica nella futura analisi dei dati (...in questo caso del dato...), quindi non si potrà ad esempio usufruire degli espedienti statistici per ridurre l'errore associato: bisogna che la misura così come è stata prelevata sia la migliore possibile in quanto non sarà possibile raffinarla ulteriormente.

La discrepanza

Nel momento in cui due misure sono in disaccordo diciamo che tra loro vi è una discrepanza. Numericamente definiamo la discrepanza come la differenza tra due valori misurati della stessa grandezza.
E` importante sottolineare che una discrepanza può essere o non essere significativa. Se due studenti misurano la capacità di un condensatore e ottengono i risultati

$$C_1 = (40 \pm 5)nF$$

e

$$C_1 = (42 \pm 8)nF$$

la differenza di 2 nF è minore dei loro errori: in questo modo le due misure sono ovviamente consistenti.
D'altra parte se i risultati fossero stati

$$C_1 = (350 \pm 20)nF$$

e

$$C_1 = (450 \pm 10)nF$$

allora le due misure sarebbero state chiaramente inconsistenti e la discrepanza di 100nF dovrebbe essere significativa. In questo caso si sarebbero resi necessari controlli accurati per scoprire gli errori commessi.

Confronto di due misure

In molte esperienze si determinano due numeri che, in teoria, dovrebbero essere uguali.
Per esempio, la legge di conservazione della quantità di moto stabilisce che la quantità di moto totale di un sistema isolato è costante.
Per provarlo, potremmo compiere una serie di esperimenti con due carrelli che si urtano quando si muovono lungo una rotaia priva di attrito. Potremmo misurare la quantità di moto totale dei due carrelli prima della collisione (p) e di nuovo dopo la collisione (p'), e verificare di seguito se p=p' entro gli errori sperimentali.
Per una singola coppia di misure, il nostro risultato potrebbe (ad es.) essere

$$p = 1.49 \pm 0.04 \ \ Kg \cdot m/s$$

e

$$p' = 1.56 \pm 0.06 \ \ Kg \cdot m/s$$

Qui l'intervallo in cui p probabilmente giace (1.45-1.53) si "sovrappone" all'intervallo in cui presumibilmente giace p' (1.50-1.62). Allora questa misura è consistente con la conservazione della quantità di moto.
Se, invece, i due intervalli probabili non fossero così vicini da sovrapporsi, la misura non sarebbe consistente con la conservazione della quantità di moto. A quel punto dovremmo verificare l'esistenza di errori, nelle misure o nei calcoli, la presenza di errori sistematici, o la possibilità che alcune forze esterne (come la gravità o l'attrito) abbiano causato la variazione della quantità di moto del sistema.

PRIMO APPROCCIO ALL'ANALISI DELLE INCERTEZZE

Il modo corretto di fornire qualunque misura è quello di dare la miglior stima per la quantità in questione e l'intervallo all'interno del quale si ritiene che essa si trovi.
Ad esempio, un'ipotetica misura di lunghezza potrebbe essere così riportata:
miglior stima = 36.4 cm
intervallo probabile = 36.2 - 36.6 cm
In questo caso la miglior stima giace esattamente in mezzo all'intervallo stimato: questa condizione è quella che usualmente si verifica nella maggior parte delle misure. Essa permette di sintetizzare il risultato in forma più compatta quale la seguente:
valore misurato = (36.4 $\pm$ 0.2) cm
Se generalizziamo quanto detto, possiamo dire che il risultato di una qualsiasi misura della grandezza x può venire espressa nella forma:
valore misurato di x = $x_m \pm \delta x$
intendendo con x_m la miglior stima della grandezza in esame.
La quantità δx è detta incertezza o errore nella misura della x e, come è già stato detto, rappresenta l'intervallo entro il quale riteniamo che la quantità misurata si trovi. Accade però che nella maggior parte delle misure scientifiche, per essere "assolutamente certi" di inglobare nell'intervallo considerato il reale valore della grandezza, si debba prendere un valore per δx troppo grande perchè sia effettivamente utile, cosicchè si decide di rinunciare ad essere "assolutamente certi" di inglobare il valore reale, dando invece un intervallo entro il quale siamo confidenti ad esempio al 70% che la reale quantità sia compresa tra $x_m - \delta x$ e $x_m + \delta x$.

COME SI RAPPRESENTANO GLI ERRORI

Poichè la grandezza che abbiamo chiamato δx rappresenta essa stessa una stima di un errore, non deve essere ovviamente stabilita con una precisione troppo elevata.
La regola generale, salvo in un'unica eccezione, che sovente si segue per valutare gli errori è la seguente:
gli errori sperimentali dovrebbero di norma essere arrotondati ad una cifra significativa.
Ad esempio, sarebbe assurdo dare come risultato della misura dell'accelerazione di gravità il seguente:
g = 9.82 $\pm$ 0.02385 m/s2

Infatti la parte più significativa dell'errore (0.02385) cade sulla seconda cifra dopo la virgola ed in particolare rappresenta un errore di due parti su cento (0.02): non ha quindi senso specificare ulteriormente le altre cifre che mi danno errori di una parte su mille, diecimila e centomila in quanto l'errore di due parti su cento ingloba tutti gli altri.
Intestardirsi a raggiungere precisioni dell'ordine di 10-6 quando la prima e più significativa cifra dell'errore è dell'ordine di 10-2 sarebbe come voler rifinire con una limetta da unghie la struttura in acciaio di un traliccio dell'alta tensione.

COME SI FORNISCE IL RISULTATO

Una volta valutato l'errore vediamo come esprimere il risultato: per fare questo avvaliamoci di un esempio.
Consideriamo la seguente espressione:
lunghezza misurata = 4531.68 $\pm$ 20 cm

Questa scrittura risulta se non altro buffa: un errore pari a 20 cm significa che la terza cifra del risultato in questione, cioè il 3, potrebbe variare tra un massimo di 5 e un minimo di 1. In pratica l'intervallo probabile entro il quale riteniamo si trovi il valore vero della grandezza è:

intervallo probabile = 4551.68 - 4511.68 cm

Ovviamente scrivere 4531.68 $\pm$ 20 cm specificando tutte le cifre seguenti al 3 non ha senso, mentre invece il risultato ottenuto dovrebbe essere arrotondato a:

lunghezza misurata = 4530 $\pm$ 20 cm

La regola generale per esprimere i risultati in modo corretto può quindi venire così enunciata:
l'ultima cifra significativa di qualunque risultato dovrebbe di solito essere dello stesso ordine di grandezza, cioè nella stessa posizione decimale) dell'errore.

ERRORI
Introduzione

Come già detto nell'introduzione, ogni grandezza è definita dalle operazioni sperimentali che si compiono per ottenerne la misura: il risultato di una misura dipende perciò dal procedimento adottato e dalle caratteristiche dello strumento usato nonchè da tutti quei fattori esterni che intervengono sullo svolgersi dell'esperimento e della misura.
Ora noi sappiamo che per quanto ci si possa sforzare di aumentare la sensibilità dei nostri strumenti o di affinare le tecniche di prelievo dei valori, tutte le misure che effuttuiamo sono affette da errore: questo significa che esse non coincidono con il "valore vero" della grandezza misurata. Ma cos'è che fa sì che i risultati che otteniamo non siano il valore vero della grandezza, bensì costituiscano una misura tanto più precisa quanto più si avvicina al cosiddetto valore vero?
I tipi di errore che possiamo commettere all'atto della misura sono molteplici e si possono racchiudere in tre gruppi fondamentali:
Errori casuali
Errori sistematici
Disturbi
Inoltre si può individuare una quarta categoria, quella rappresentata dai veri e propri svarioni.

ERRORI CASUALI

Si dicono casuali tutti quegli errori che possono avvenire, con la stessa probabilità, sia in difetto che in eccesso.
Data questa caratteristica, definiamo errori casuali tutte quelle incertezze sperimentali che possono essere rilevate mediante la ripetizione delle misure.
Questi tipi di errore si possono manifestare per svariati motivi: ad esempio a causa della variazione del tempo di reazione da un soggetto ad un altro (e anche per lo stesso soggetto in situazioni diverse), per errori di lettura di indici dovuti ad un non perfetto allineamento tra l'osservatore e la scala graduata o imputabili ad una interpolazione errata, o anche per semplici fluttuazioni del sistema in esame attribuibili per esempio a degli sbalzi termici.
La loro natura di casualità è proprio legata al fatto che essi hanno un'origine aleatorea e molto spesso temporanea: questo, al ripetersi delle misure, determina sull'evento in esame delle ,fluttuazioni in modo tale che le misurazioni che si ottengono oscillano attorno ad valore pressochè costante.
Ovviamente nel caso in cui sia possibile ripetere le misure l'individuazione di tali errori è abbastanza semplice: inoltre all'aumentare del numero delle misure, le fluttuazioni introdotte tendono a "bilanciarsi" in quanto avvengono sia in difetto che in eccesso con la stessa probabilità.

ERRORI NEL PRODOTTO CON UNA COSTANTE

Supponiamo di misurare una grandezza x e in seguito di utilizzare tale quantità per calcolare il prodotto z=Kx dove il numero K è una costante e come tale non ha errore. Classico esempio di tale situazione è rappresentato dal calcolo della lunghezza di una circonferenza, ove il diametro, misurato con la sua incertezza, viene moltiplicato per la costante pi greca.
Per la valutazione dell'incertezza sul prodotto di una grandezza per una costante ci rifacciamo a quanto è stato detto per il calcolo dell'errore nei prodotti e nei quozienti. In particolare l'errore relativo su <I<Z< i>dovrebbe essere stimabile attraverso la somma di quelli su K e su x. Dal momento però che non abbiamo errore su K risulta che, anche considerando la somma in quadratura:

$$\frac{\delta z}{|z_m} = \frac{\delta x}{|x_m|}$$

Se vogliamo considerare l'errore assoluto, basta che moltiplichiamo per $|z_m|$=|Kx| e otteniamo

$$\delta z = |K|\, \delta x$$

Riassumendo possiamo enunciare la regola per il calcolo dell'errore del prodotto di una grandezza con una costante nel modo seguente:
data una grandezza x misurata con la sua incertezza δxed utilizzata per calcolare il prodotto z = Kx , dove K non ha errore, allora l'errore relativo in z è pari a

$$\frac{\delta z}{|z_m} = \frac{\delta x}{|x_m|}$$

mentre l'errore assoluto è dato da

$$\delta z = |K|\, \delta x$$

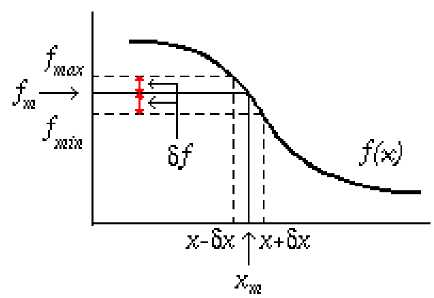
LA PROPAGAZIONE PASSO PER PASSO

Consideriamo ad esempio un'espressione del tipo

$$z = x + y\ (u - \ln w)$$

Se partiamo dalle singole quantità misurate x, y, u e w possiamo calcolare l'incertezza sulla precedente espressione procedendo in questo modo: calcoliamo la funzione ln w, quindi la differenza u - ln w, il prodotto y (u - ln w) e infine la somma di x con y (u - ln w). Dalla precedente analisi sulle singole operazioni siamo in grado di dire come si propagano gli errori attraverso ogni singolo passaggio, cosicchè, se supponiamo come abbiamo fatto fin'ora che le grandezze in esame siano indipendenti, calcoliamo l'errore sul risultato finale procedendo secondo i passi descritti partendo dalle misure orginali.
Troveremo così inizialmente l'errore sulla funzione ln w: noto questo calcoleremo l'errore sulla differenza u - ln w e poi quello sul prodotto y (u - ln w) arrivando finalmente all'errore completo sull'espressione x + y (u - ln w).
Bisogna però prestare attenzione al fatto che trattando allo stesso tempo somme e prodotti, si deve possedere una certa dimestichezza nel trattare simultaneamente errori assoluti ed errori relativi: inoltre abbiamo parlato della funzione logaritmo, ma non è stato ancora illustrato il metodo per ricavare l'incertezza associata a tale operazione.
Per questa e in generale per funzioni arbitrarie di una variabile si rimanda alla sezione dedicata allo studio dell'incertezza per funzioni di una variabile o alla generalizzazione a più variabili.

- PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI - FUNZIONI ARBITRARIE DI UNA VARIABILE



Dopo avere studiato i casi di somma, differenza, prodotto e quoziente andiamo a studiare funzioni più complicate di una variabile e cerchiamo di trovare una regola generale per la propagazione degli errori in tali funzioni.
Vediamo come procedere: supponiamo al solito di aver misurato una grandezza x nella forma

$$x_m \pm \delta x$$

e di usare questa quantità per calcolare una qualche funzione nota f(x).
Per capire come l'errore sulla quantità di partenza x si propaghi attraverso il calcolo dell'ipotetica funzione f(x) pensiamo al grafico di quest'ultima: dalla figura vediamo come la miglior stima per f(x) sia costituita da f_m che non è altro che il valore assunto dalla funzione nel punto x_m. Per quanto riguarda l'errore fruttiamo il più grande e il più piccolo valore probabile di x: da questi graficamente troviamo i corrispettivi valori probabili f_{max} e f_{min} della funzione.
Operando in questo modo non è sempre detto che f_{max} e f_{min} siano simmetrici rispetto a f_m: se però l'incertezza δx è sufficientemente piccola la porzione di grafico che andiamo ad analizzare è così ristretta che la funzione in quel dominio può essere approssimata ad una retta. Se così è allora f_{max} e f_{min} sono ugualmente spaziati su entrambe i lati di f_m e l'incertezza δf, che ci permette di scrivere il risultato nella forma $f_m \pm \delta f$, può essere ricavata dal grafico.
Molto spesso però non si ricorre all'osservazione del grafico per ricavare l'errore in quanto si conosce la forma analitica della funzione (ad es. ln x, cos x, ecc.).
Una nota proprietà dell'analisi matematica afferma che nel caso in cui δy sia piccolo si ha

$$q(y+\delta y) - q(y) = \frac{dq}{dy}\delta y$$

Ora noi abbiamo che se il nostro errore δx sulla misura è piccolo possiamo scrivere

$$\delta f = f(x_m + \delta x) - f(x_m)$$

Confrontandola con la precedente possiamo asserire che

$$\delta f = \frac{df}{dx}\delta x$$

La regola generale per il calcolo dell'errore per una fuzione arbitraria di una variabile si ottiene da questa con un piccolo accorgimento: poichè la pendenza della curva rappresentante la funzione può essere sia positiva che negativa, influenzando così il segno della derivata, dobbiamo considerare il valore assoluto di quest'ultima.
In pratica abbiamo:
se x, misurato con incertezza δx , viene utilizzato per calcolare una funzione arbitraria f(x), allora l'errore su tale funzione è pari a

$$\delta f = \left|\frac{df}{dx}\right|\delta x$$

Nel caso in cui la funzione in esame dipenda da più di una variabile, bisogna considerare l'estensione di questa regola al caso di funzioni arbitrarie di più variabili.