

Come misurare la massa di un corpo: due facili esperimenti con R^o

B

Introduzione

Alla domanda, solo apparentemente facile, "cosa pesa di più: 1 kg di polistirolo o 1 kg di ferro?" viene spesso suggerita come risposta corretta "il peso è lo stesso". Questa risposta può essere soddisfacente a livello elementare, quando la domanda è posta per sottolineare la differenza concettuale tra *densità* e *peso* a studenti cui l'esperienza diretta suggerisce che il ferro sia sempre più pesante del polistirolo, ma l'insegnante di fisica sa invece che per rispondere occorre prendere in considerazione vari effetti^[1].

La domanda trabocchetto sopra riportata può essere riformulata in modo meno ambiguo come segue: "Se due blocchi, uno di ferro ed uno di polistirolo che hanno la stessa massa, vengono pesati con una bilancia, risultano avere lo stesso peso?"

Qui la risposta è ovviamente "no", dato che la spinta idrostatica sul blocco di ferro, che ha densità maggiore e quindi minor volume, è minore rispetto a quella che agisce sul blocco di polistirolo.

La bilancia misura, infatti, la somma vettoriale delle due forze (quella idrostatica e quella gravitazionale) e può quindi essere calibrata in unità di massa solo se il termine idrostatico risulta trascurabile. Ma se la bilancia non è adatta a fornire corrette misure di massa, come possiamo misurare la massa di un corpo? I moderni sistemi RTL ci offrono un sistema semplice per rispondere a questo quesito. Qui descriviamo due esperimenti didattici pensati per confrontare le misure di *massa* e *peso* di un corpo, utilizzando solo un sensore di distanza, un sensore di forza e pochi altri oggetti d'uso comune. Lo studio proposto richiede misure indipendenti della *massa* e del *peso* dello stesso oggetto (per questo motivo si deve aver chiaro il diverso significato dei concetti di *massa inerziale* e *massa gravitazionale*).

Un primo esperimento: i rimbalzi di un pallone

Per suscitare una discussione sulla misura della massa di un corpo proponiamo un primo esperimento nel quale mettiamo a confronto due procedimenti diversi di misura della massa: uno statico ed uno dinamico.

Usiamo un grande pallone da ginnastica^[2] (gonfiato con una pompa da bicicletta fino ad un diametro di circa 40 cm), un sonar ed un sensore di forza connessi tramite CBL™ ad una calcolatrice grafica TI-89.

Come prima operazione fissiamo con il nastro adesivo un tratto di spago attorno al pallone, lasciando un cappio annodato sporgente per appenderlo al sensore di forza tenuto in mano. Se assumiamo che la forza agente sia solo quella gravitazionale (come facciamo quando usiamo una bilancia) otteniamo per la massa del pallone il valore

$$m = \frac{F}{g} \quad (1)$$

Nel nostro caso^[3] il peso misurato vale $F=8.80$ N corrisponde ad una massa $m = F/g = 0.898$ kg.

Come seconda operazione confrontiamo il valore così calcolato con quello ottenuto tramite la relazione

$$m = \frac{F}{a} \quad (2)$$

ove F è la forza applicata e a la accelerazione risultante.

Il primo valore corrisponde alla massa gravitazionale m_g , il secondo alla massa inerziale m_i del pallone. Ci aspettiamo che tali valori siano identici, anche se essi si riferiscono a due proprietà diverse del medesimo oggetto^[4].

Misuriamo la massa inerziale registrando il moto del pallone durante alcuni rimbalzi e ricavando il valore dell'accelerazione nei tratti di salita e di discesa. Il sonar viene tenuto a circa 2 metri da terra e puntato verso il basso in modo da rilevare la posizione del pallone che viene fatto rimbalzare sotto di esso. I tre grafici di posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo, prodotti automaticamente dal sistema e resi disponibili sullo schermo della calcolatrice grafica sono come quelli mostrati in figura 1.

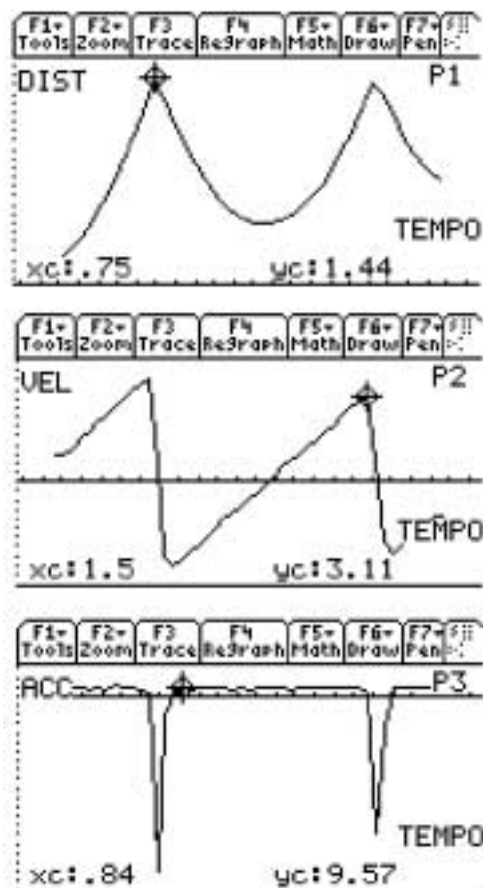


Figura 1: Posizione, velocità e accelerazione del pallone in funzione del tempo

Da ciascuno dei tre grafici di figura 1 possiamo ottenere una stima della accelerazione a durante i rimbalzi (sia nei tratti di salita che in quelli di discesa): mediante interpolazione quadratica nel primo grafico, interpolazione lineare nel secondo, e mediante una semplice media nel terzo.

Dalla interpolazione lineare riportata in figura 2 non si notano apprezzabili effetti di attrito sulla accelerazione.

Una forza di attrito, infatti, avendo verso opposto alla velocità, si sommerebbe alla forza-peso nella fase di moto in salita e si sottrarrebbe alla forza-peso nella fase di moto in discesa (fornendo, nel grafico velocità-tempo, pendenze diverse nei due tratti). Invece le pendenze dei tratti in salita e discesa risultano praticamente uguali^[5].

Come misurare la massa di un corpo: due facili esperimenti con RT

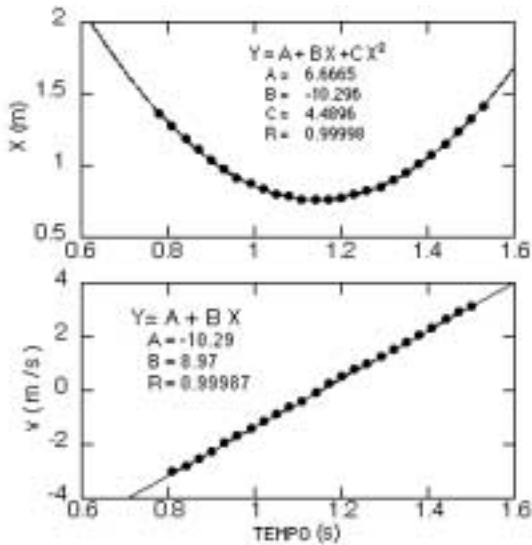


Figura 2: Interpolazioni quadratica e lineare per calcolare l'accelerazione

Dato che il valore misurato dell'accelerazione è $a \approx 9 \text{ m/s}^2$ (valore che si è appena visto non essere affetto da errore sistematico dovuto ad attriti), molto inferiore a quello della accelerazione di gravità, il valore risultante per la massa inerziale $m_i = F/a = 0.980 \text{ kg}$ è assai maggiore di quello misurato in precedenza come $m_g = F/g = 0.898 \text{ kg}$. La differenza percentuale è circa 8%, ben di più dell'incertezza sperimentale^[6]. Questo risultato sperimentale mette in evidenza la necessità di rivedere gli assunti teorici alla base dei due diversi procedimenti di misura.

Una prima correzione: la spinta idrostatica.

Possiamo cercare di spiegare questa differenza tenendo conto della forza di Archimede dovuta al fatto che il pallone è immerso nell'aria: tale forza può essere scritta $F_A = \rho g V$, ove $V = (4/3)\pi R^3$ è il volume del pallone (di raggio R) e ρ è la densità dell'aria.

Allora la forza totale agente sul pallone vale $F = m_g g - \rho g V$, e la massa gravitazionale va calcolata tramite la relazione

$$m_g = \frac{(F + \rho g V)}{g} \quad (3)$$

Per calcolare la spinta idrostatica misuriamo la lunghezza $2\pi R$ di un filo avvolto attorno al pallone, e dal raggio ottenuto ($R = 21.5 \text{ cm}$) ricaviamo $V = 4.16 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$. Assumendo per la densità dell'aria il valore $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ citato in molti libri di testo (aria secca a 0°C e 100 kPa), la forza d'Archimede risulta $F_A = 0.49 \text{ N}$, circa il 5.6% del peso misurato. Quindi la massa gravitazionale calcolata diventa $m_g = (0.95 \pm 0.03) \text{ kg}$, un valore comunque minore di quello ottenuto per la massa inerziale dalle misure di accelerazione m_i , e compatibile con esso, tenuto conto delle incertezze sperimentali^[7]. Tuttavia ripetute misure mostrano che i valori calcolati per m_i sono sempre in eccesso rispetto a quelli calcolati per m_g , indicando quindi la presenza di un'altra fonte di errore sistematico. Potremmo ipotizzare che il valore

assunto per la densità dell'aria sia troppo piccolo, il che ci farebbe sottostimare la correzione al valore calcolato per m_g . Ma considerando che lavoriamo a temperatura ambiente (e non a 0°C), e che l'aria umida tipica di Padova ha una densità inferiore a quella dell'aria secca, dobbiamo concludere che il valore adottato per ρ dev'essere in eccesso piuttosto che in difetto. Pertanto dobbiamo cercare una diversa ragione per i valori di m_i sistematicamente in eccesso.

Una seconda correzione necessaria: la massa idrodinamica.

Il fenomeno che cerchiamo deve in qualche modo far crescere il valore efficace della massa inerziale m_i rispetto al valore della massa gravitazionale m_g .

Un effetto di questo tipo è dovuto alla *massa idrodinamica* m_h , ovvero l'aumento dell'inerzia di un oggetto che si muove in un fluido, legato al fatto che anche un po' di fluido deve essere posto in movimento.

Un calcolo completo della massa idrodinamica si può trovare in letteratura^[8]. Per una sfera si ha $m_h = (1/2)\rho V$, cioè metà della massa dell'aria spostata.

Tenendo conto di questo effetto l'equazione del moto diventa:

$$a = \frac{F}{m_i} = \frac{F}{m_g + (1/2)\rho V} = \frac{F}{F/g + (3/2)\rho V} \quad (4)$$

che predice, per il nostro pallone, $a = 9.05 \text{ m/s}^2$, in buon accordo con il risultato sperimentale.

Nell'equazione (4) la quantità F/g è la "massa misurata con la bilancia" e possiamo quindi concludere che l'inerzia osservata nel moto è equivalente a quella di un pallone la cui massa è aumentata, rispetto al valore misurato dal suo peso, della quantità $(3/2)\rho V$.

In altri termini: nel nostro esperimento la massa inerziale coinvolta nel moto non è la sola massa del pallone: dobbiamo considerare il sistema nel suo insieme, in modo simile al caso della macchina di Atwood orizzontale (dove la massa accelerata è la somma della massa del carrello e della massa del pesetto che lo sta trascinando), o al caso di corpi che rotolano su un piano inclinato (dove la forza agente è prodotta dal campo gravitazionale, ma l'inerzia dipende dalla distribuzione della massa rispetto all'asse di rotazione...).

Un secondo esperimento: le oscillazioni di un pallone.

Il confronto della misura statica di una massa di un corpo con la misura dinamica corrispondente può essere facilmente effettuato anche a partire dalla registrazione del moto oscillatorio del corpo attaccato ad una molla.

Usiamo lo stesso sistema RTL, una molla^[9] e un supporto rigido per sostenere il sensore di forza come mostrato in figura 3.

L'oscillatore massa-molla è un apparato ben noto agli insegnanti di fisica, ma qui viene utilizzato essenzialmente per misurare la massa inerziale, in modo simile a quello suggerito nel testo del PSSC (bilancia inerziale^[10]).

Il sistema massa-molla oscilla con pulsazione ω data da $\omega^2 = k / m_i$, ove k è la costante elastica della molla. In assenza di un sensore di forza la massa inerziale m_i potrebbe essere calcolata attraverso misure separate di ω (dalla pendenza del

Come misurare la massa di un corpo: due facili esperimenti con R

grafico della accelerazione in funzione dello spostamento) e di k (dalla pendenza del grafico della forza in funzione dello spostamento).

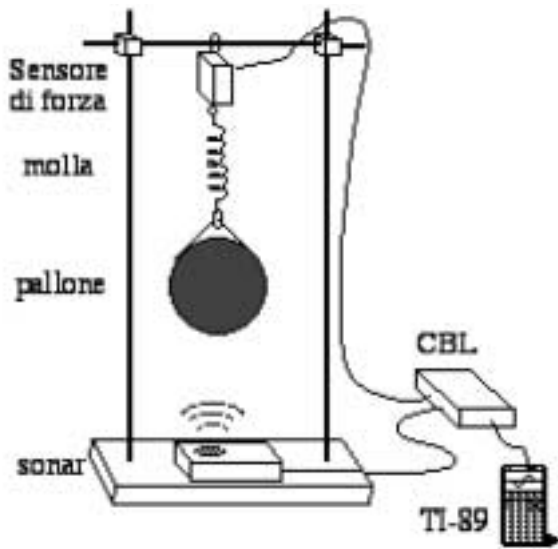


Figura 3: Apparato sperimentale

Usando anche il sensore di forza la massa inerziale può più semplicemente venire calcolata direttamente dalla pendenza del grafico della forza in funzione della accelerazione, tramite la legge di Newton

$$F = m_i a$$

Un esempio dei grafici ottenuti con il nostro pallone è riportato in figura 4.

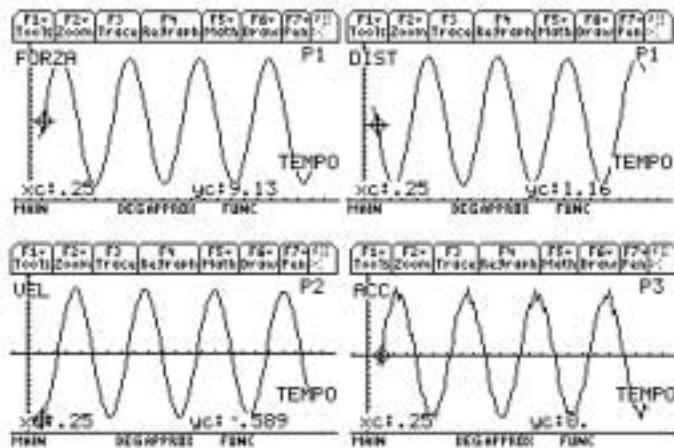


Figura 4: Grafici di forza, distanza, velocità e accelerazione in funzione del tempo

Dalla pendenza del grafico forza-accelerazione mostrato in figura 5 otteniamo $m_i = 0.974$ kg un valore 8% maggiore rispetto al valore F/g ottenuto "pesando" il pallone.

Come nel primo esperimento, la spinta idrostatica da sola (la correzione $\rho V = 0.05$ kg) non può spiegare completamente tale discrepanza. Per ottenere un valore previsto per la massa inerziale m_i più vicino a quello misurato dobbiamo aggiungere il termine $\rho V/2$ dovuto alla massa idrodinamica.

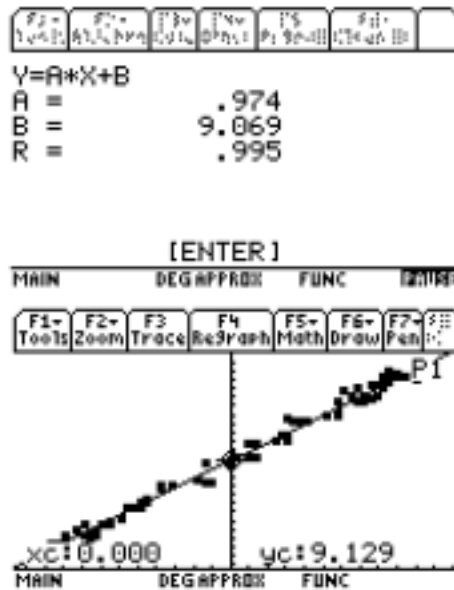


Figura 5: Grafico forza-accellerazione

Si potrebbe aggiungere che manca ancora un termine nel nostro modello di oscillatore massa-molla: la massa inerziale della molla oscillante. Se la molla ha una massa m_s essa dà il contributo $m_s/3$ a m_i , contributo che può essere reso trascurabile usando una molla leggera (questa è la ragione per cui abbiamo usato un elastico invece che una molla metallica). Riassumendo: il sensore di forza misura il valore $F/g = m_g - \rho V$, sottostimando la massa gravitazionale, mentre la "bilancia inerziale" misura il valore $m_i + m_h = m_i + (1/2)\rho V$, sovrastimando la massa inerziale del solo pallone.

Conclusioni

Abbiamo mostrato come l'uso di RTL possa aiutare lo studio di oggetti che si muovono in aria tenendo conto di effetti che sono importanti nelle situazioni reali ma spesso trascurati nei tradizionali curricula (la forza d'Archimede dovuta all'aria, la massa idrodinamica, gli effetti delle forze dissipative e conservative sulla accelerazione, la distinzione concettuale tra massa inerziale e gravitazionale), e abbiamo dimostrato quanto sia importante fare una scelta corretta del modello utilizzato per interpretare i dati sperimentali.

Abbiamo iniziato la nostra indagine chiedendoci se una bilancia possa fornire una misura affidabile della massa di un corpo, ma un percorso alternativo potrebbe essere il procedere al confronto tra il valore g previsto per l'accelerazione nella caduta libera di un grave e il valore misurato a che risulta sensibilmente inferiore.

In entrambi i casi i risultati sperimentali possono essere usati per discutere i diversi ruoli giocati da forza d'attrito, spinta idrostatica, forza gravitazionale e massa idrodinamica nel determinare l'accelerazione in diverse situazioni^[12].

La forza d'attrito fa crescere o calare l'accelerazione a seconda del segno della velocità dell'oggetto in movimento (essa può essere facilmente calcolata a partire dai valori misurati per l'accelerazione durante un moto bidirezionale quando le altre forze agenti restano costanti).

Come misurare la massa di un corpo: due facili esperimenti con RTL

continua

La spinta idrostatica si sottrae sempre alla forza gravitazionale (essendo essa stessa prodotta dal campo gravitazionale), e può essere pensata come una “variazione efficace della gravità”, di cui si deve tener conto quando si calcola la massa a partire dal peso di un oggetto.

La massa idrodinamica rende conto della quantità di moto che viene temporaneamente trasferita al fluido dal corpo in movimento, e che viene successivamente restituita al corpo. Questo effetto dipende essenzialmente dalla *densità* del fluido e non dalla sua *viscosità*. Si tratta di un effetto dinamico, assente in un sistema fermo.

Note

[1] Confondere *peso* e *massa* è un errore abbastanza comune, cui gli studenti possono essere indotti per effetto di ragioni diverse. Nel Sistema Pratico il medesimo numero indica sia la *forza* dovuta al campo gravitazionale agente su un corpo sia la *massa* del corpo. Per questa ragione spesso la bilancia è considerata un dispositivo che misura direttamente la massa di un corpo anziché la forza-peso. Inoltre la spinta idrostatica dovuta all'aria (detta anche spinta d'Archimede) sugli oggetti normalmente utilizzati in laboratorio è di solito assolutamente trascurabile rispetto alla forza dovuta al campo gravitazionale.

l'accelerazione di gravità è $g=9.81 \text{ m/s}^2$. Piccole variazioni di g

[4] La prima, definita dalla legge di Newton $F=ma$, misura il rapporto tra forza F applicata ad un corpo e l'accelerazione a risultante, la seconda, è invece definita implicitamente dalla legge di gravitazione universale $F= m (\gamma M/r^2)$, che sulla Terra viene di solito semplificata in $F=mg$, ove $g=(\gamma M/r^2)$ è l'accelerazione di gravità che dipende dalla massa della Terra M e dalla distanza r della massa m dal baricentro terrestre (trascurando l'effetto dovuto alla rotazione terrestre). Le due grandezze risultano essere tra loro proporzionali, così che possiamo scegliere di misurare entrambe con la stessa unità di misura.

[5] In realtà una *leggera* differenza può essere rivelata eseguendo due interpolazioni separate per il tratto in salita e quello in discesa.

[6] Un errore sistematico in queste misure viene introdotto dalla assunzione del valore fisso (344 m/s) per la velocità del suono in aria alla temperatura di 22°C (usato per convertire il segnale del sonar, corrispondente a misure di intervalli di tempo, in valori di distanza). La debole dipendenza dalla temperatura di questo parametro introduce un errore di circa $\pm 1\%$ quando la temperatura ambiente è di 18°C o 28°C, rispettivamente.

[7] Le incertezze su m_i e m_g sono stimate assumendo 1% di incertezza sulla forza F , sul raggio R , e sulla accelerazione a , e 3% di incertezza sulla densità ρ .

[8] Per esempio in H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, N.Y., 1932, o in L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Pergamon, N.Y., 1959.

[9] Abbiamo usato un grosso elastico, con costante elastica $k=27 \text{ N/m}$ e una massa $m=0.005 \text{ kg}$.

[10] PSSC, *Teacher's Resource Book and Guide*, parte III, 3, Boston, 1965.

[11] Si veda ad esempio L.Ruby, Equivalent mass of a coil spring, *The Physics Teacher*, 38, 140, 2000.

[12] Con questo pallone la forza d'attrito (misurabile attraverso la differenza tra pendenze dei grafici velocità-tempo nei tratti in salita e discesa), è dell'ordine del 3% della forza-peso. Con una pallina da ping-pong, la spinta idrostatica è dell'ordine dello 0.7%, mentre l'attrito dell'aria si riduce ad uno 0.1% della forza-peso; con una pallina di *gomma piena* tutti gli effetti qui descritti danno contributi inferiori all'1% e la pallina si comporta praticamente come se cadesse in assenza d'aria.

