La musica e l'incommensurabile

Ci sono più teorie concorrenti che si propongono di stabilire qual è il primo numero che è stato identificato come irrazionale. Quello citato più spesso è la radice di 2 , che viene talvolta preceduta dal numero aureo, Ψ = (1 + $\sqrt{5}$)/2 cioè 1,618 .

E se la scoperta del primo numero irrazionale riconosciuto come tale fosse stata possibile grazie alla musica? Le riflessioni teoriche sull'armonia musicale risalgono alla scuola pitagorica, le cui constatazioni empiriche sono sfociate nella matematizzazione del problema della costruzione di una scala, ovvero un insieme di note separate da intervalli armoniosi. I pitagorici osservarono che l'altezza del suono prodotto da una corda era legata alla lunghezza di quest'ultima. In termini moderni, data una lunghezza di riferimento , la corda che la possiede vibra a una certa *f* corrispondente al numero di oscillazioni della corda in un secondo. Una corda lunga la metà produce un suono di frequenza *2f* , una lunga un terzo ne produce uno di frequenza *3f* , e così via. Le frequenze *2f , 3f, 4f, ecc.* sono le armoniche del suono fondamentale. Produrre simultaneamente la frequenza *f* e una delle sue armoniche è armonioso, nel senso che vi è un legame fisico diretto tra le due frequenze , cioè fra i due suoni. Qualunque suono può essere ricondotto, per raddoppiamenti o dimezzamenti della sua frequenza, a un suono la cui frequenza è compresa tra *f e 2f,* l'intervallo che abbiamo scelto come ottava di riferimento. Va da sé che ciò (serie del do) non fornisce un numero di note sufficienti per fare della musica. Perciò si è dovuto usare una frequenza nuova, *3f.* Dividendo questa frequenza per 2 , per tornare nell'ottava di riferimento si è ottenuto la frequenza (*3/2)f* . si può dimostrare che partendo da una frequenza *f* tutte le frequenze ottenibili possono essere scritte nella forma $(2^m x 3^n)f$ dove m e n sono interi (positivi e negativi). Ad esempio , è possibile ottenere la frequenze (9/8)f ovvero: $(2^{-3} x\ 3^2)f$, *(8/3)f* (cioè $(2^3 x\ 3^{-1})f$), *6f,* (cioè $(2^1 x\ 3^1)f$), *ecc.* . Senza continuare i calcoli si era arrivato a stabilire l'impossibilità di avere una scala al tempo stessa completa sulla base delle regole fissate dai pitagorici, dunque, non è altro che l'espressione dell'impossibilità di trovare una coppia di interi *p* *e q* non nulli tali che $2^p = 3^q$ *;* si può pensare ragionevolmente che i pitagorici lo avessero capito , pur esprimendo il concetto in forma diversa. E' del tutto possibile che gli studi dei pitagorici sull'armonia musicale abbiano preceduto le loro ricerche matematiche sull'irrazionalità. Perciò si potrebbe difendere l'idea che $\log_2(3)$ sia stato il primo irrazionale riconosciuto in quanto tale, anche se si è dovuto aspettare fino al XVIII secolo prima di poter esprimere in questa forma le conclusioni cui erano arrivati i pitagorici. In effetti, fu solo nel 1761 che Johan Lambert fornì la dimostrazione dell'irrazionalità di $\log_2(3)$, accludendola a un lavoro conosciuto soprattutto per essere stato il primo a dimostrare l'irrazionalità di π e presentandolo come una conseguenza dei risultati generali del lavoro.