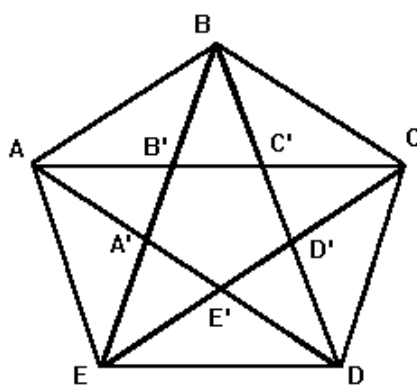


Pentagono e Dodecaedro

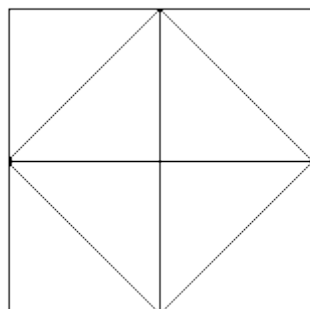
di Piergiorgio Oddifreddi

Narra la leggenda riportata da Giamblico nella vita di Pitagora che Ippocrate di Chio fu radiato dalla confraternita dei pitagorici per aver divulgato la costruzione del pentagono, così come Ippaso di Metaponto per' in naufragio per aver analogamente divulgato la costruzione del dodecaedro.

Che cosa ci fosse da non divulgare nella costruzione del pentagono e del dodecaedro, tanto da provocare guai seri a chi lo fece, è presto detto. Il dodecaedro consiste di facce pentagonali, e il pentagono è scandaloso perché il rapporto geometrico fra la sua diagonale e il suo lato è irrazionale, nel senso che non si può misurare mediante un rapporto aritmetico fra numeri interi.



La dimostrazione dell'irrazionalità del rapporto fra diagonale e lato del pentagono è intuitiva, e formano infatti una *stella pitagorica*, al centro della quale sta un pentagono regolare, il cui lato è la differenza tra il doppio del lato e la diagonale del pentagono di partenza, e la cui diagonale è la differenza tra la diagonale e il lato. Se lato e diagonale del pentagono grande fossero misurati da due interi, lato e diagonale del pentagono piccolo sarebbero anch'essi misurati da due interi, più piccoli dei precedenti. E poiché il procedimento si può iterare, si otterrebbero successioni infinite decrescenti di interi positivi, il che è impossibile. Il più noto rapporto irrazionale è però quello tra la diagonale e il lato del quadrato, anche se la dimostrazione è in questo caso meno intuitiva: la figura del *Menome* di Platone inserisce infatti all'interno di un quadrato grande un quadrato piccolo, la cui diagonale è uguale al lato del precedente, ma il cui lato è uguale a metà della diagonale.



Ma la metà di un intero è un intero solo se l'intero di partenza è pari: l'argomento geometrico va dunque supplementato da un argomento aritmetico, la cui prima testimonianza storica si trova negli *Analitici Primi* di Aristotele, e che dimostra comunque in maniera autonoma l'irrazionalità della radice di 2. Mentre per gli antichi le dimostrazioni di irrazionalità erano uno scandalo, per noi sono l'anticipazione di grandi risultati moderni, primo fra tutti il *principio di indeterminazione* di Heisenberg. L'irrazionalità della radice di 2 stabilisce, infatti, l'impossibilità di misurare contemporaneamente, mediante numeri interi, il lato e la diagonale del quadrato: una misura intera del lato esclude una misura della diagonale, e viceversa. I fisici direbbero che lato e diagonale sono grandezze *ortogonali* (nello spazio delle fasi), benché per i matematici esse formino soltanto un angolo di 45° (nello spazio euclideo). In maniera leggermente più complicata, la dimostrazione di irrazionalità della radice di 2 si può anche vedere come un'anticipazione del *teorema di incompletezza* di Godel. Consideriamo la formula *per ogni* x e Y , il quadrato di x non è uguale al doppio del quadrato di y . Se interpretiamo le variabili come numeri interi, la formula è vera, proprio perché la radice di 2 non è razionale. Se invece interpretiamo le variabili come numeri reali, allora la formula è falsa: basta prendere come x la radice di 2 stessa, e come y il numero 1. Il che significa che né la formula né la sua negazione possono essere dimostrabili in un sistema che dimostri soltanto verità comuni ai numeri interi e ai numeri reali. In altre parole, qualunque sistema del genere deve essere incompleto. Il teorema di Godel estende l'esempio precedente a tutti i sistemi che dimostrino soltanto verità sui numeri interi, lasciando cadere il riferimento ai numeri reali. Con una differenza: che non è più possibile dare un esempio fisso, che funzioni una volta per tutte. Qualunque formula aritmetica, infatti, è vera o falsa per i numeri interi: dunque, o la formula o la sua negazione possono fungere da assioma per un sistema che dimostri soltanto verità. Ciò che Godel ha fatto, è trovare per ciascun sistema una formula che il sistema non decide, nel senso che non dimostra né la formula, né la sua negazione. Ha forse qualcosa a che vedere con la natura del Novecento il fatto che i suoi due risultati scientifici più significativi portino alle estreme conseguenze l'irrazionalità che, al suo primo apparire, aveva tanto turbato gli antichi greci?