ESERCIZIO 4 (Bernoulli: Il Tubo di Venturi)

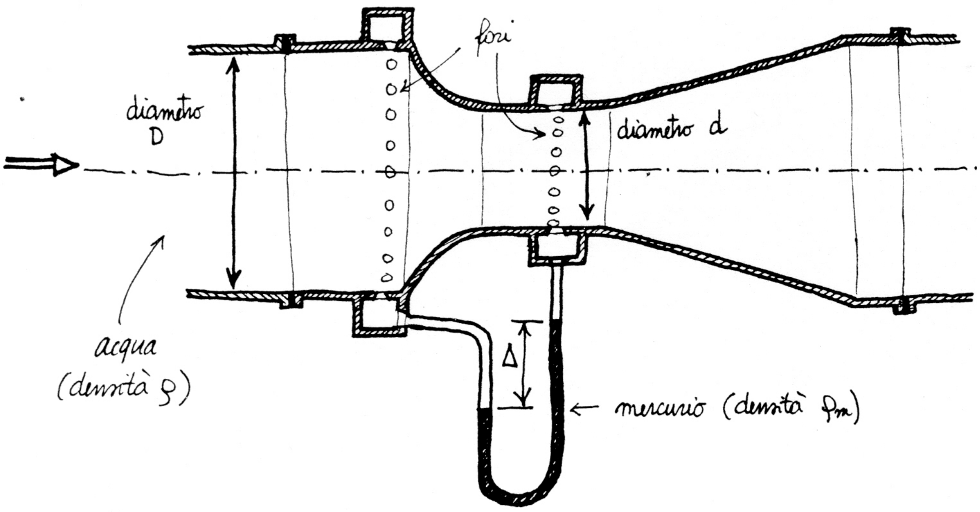

Fig. 19

Il dispositivo in figura (rappresentato in sezione) è attraversato da un flusso nel verso indicato. Noti D, d, Δ e le densità ρ e ρ_m dei due fluidi, valutare la portata che attraversa il consotto, considerando il fluido ideale e la velocità uniforme in ogni sezione.

SOLUZIONE

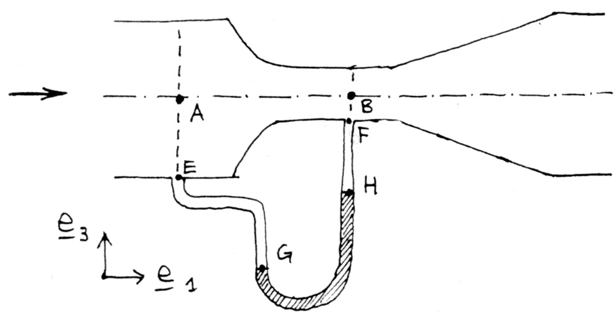

Fig. 20

Nelle ipotesi dell'esercizio, possiamo usare il teorema di Benoulli (Fluido ideale in moto irrotazionale):

$$\frac{\mu_A^2}{2}+\frac{p_A}{\rho}+gx_{3A}=\frac{\mu_B^2}{2}+\frac{p_B}{\rho}+gx_{3B}$$

dall'equazione di continuità :

$$\mu_A\frac{D^2\pi}{4}=\mu_B\frac{d^2\pi}{4}\Rightarrow\mu_B=\mu_A\left(\frac{D}{d}\right)^2$$

Abbiamo così $\frac{1}{2}\mu_A^2\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4-1\right]=\left[\frac{p_A}{\rho}+gx_{3A}\right]-\left[\frac{p_B}{\rho}+gx_{3B}\right]$

Dobbiamo valutare il secondo membro di questa equazione. Poiché il moto è irrotazionale e $\mu_A=\mu_E$,allora

$$\frac{\mu_A^2}{2}+\frac{p_A}{\rho}+gx_{3A}=\frac{\mu_E^2}{2}+\frac{p_E}{\rho}+gx_{3E}\Rightarrow\frac{p_A}{\rho}+gx_{3A}=\frac{p_E}{\rho}+gx_{3E}$$

nell'esercizio dovevamo calcolare $\left[\frac{p_C}{\rho}+gx_{3C}\right]-\left[\frac{p_A}{\rho}+gx_{3A}\right]$ e lo abbiamo approssimato con $-g\cdot(h-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot L)$. Ora invece scriviamo

$$\left[\frac{p_C}{\rho}+gx_{3C}\right]-\left[\frac{p_A}{\rho}+gx_{3A}\right]=\underbrace{\left[\frac{p_C}{\rho}+gx_{3C}\right]-\left[\frac{p_D}{\rho}+gx_{3D}\right]}_{0}+\left[\frac{p_D}{\rho}+gx_{3D}\right]-\left[\frac{p_A}{\rho}+gx_{3A}\right]$$

$$=\frac{p_D-p_A}{\rho}+g\cdot(x_{3D}-x_{3A})$$

ma p_A=p_D=p_a , $x_{3D}=x_{3C}+\frac{d}{2}\cos\alpha$

$$\Rightarrow\left[\frac{p_C}{\rho}+gx_{3C}\right]-\left[\frac{p_A}{\rho}+gx_{3A}\right]=-g\cdot\left(h-L\cdot\mathrm{tg}\alpha-\frac{d}{2}\cos\alpha\right)\approx-g\cdot(h-L\cdot\mathrm{tg}\alpha)$$

se d<<h (come diceva il testo dell'esercizio)

2) Si è usato $\left|\int_A^B\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\bullet d\underline{x}\right|<<\left|\int_B^C\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\bullet d\underline{x}\right|=\left|\frac{du}{dt}\right|\cdot L$

ma $\int_A^B\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\bullet d\underline{x}\approx\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\right)_{\substack{\text{medio}\\ \text{fra A e B}}}\cdot l_{AB}$

ma $l_{AB}\approx h$, $\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\right)_{\substack{\text{medio}\\ \text{fra A e B}}}\approx\frac{1}{2}\frac{du}{dt}$ (stima alla buona, in realtà è molto meno)

$\Rightarrow\left|\int_A^B\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\bullet d\underline{x}\right|\approx\frac{1}{2}\left|\frac{du}{dt}\right|\cdot h<<\left|\frac{du}{dt}\right|\cdot L$ se h<<L (come diceva il testo dell'esercizio)

Inoltre, il fluido fra E e G è fermo, quindi da Stenino (Pascal) ho $\frac{p_E}{\rho}+gx_{3E}=\frac{p_G}{\rho}+gx_{3G}$

Ragioando esattamente nello stesso modo fra B,F,H; ho $\frac{p_B}{\rho}+gx_{3B}=\frac{p_H}{\rho}+gx_{3H}$

da cui sostituendo otteniamo

$$\frac{1}{2}\mu_A^2\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4-1\right]=\left[\frac{p_G}{\rho}+gx_{3G}\right]-\left[\frac{p_H}{\rho}+gx_{3H}\right]=\frac{p_G-p_H}{\rho}+g\cdot(x_{3G}-x_{3H})$$

ma $(x_{3G}-x_{3H})=-\Delta$, inoltre, appicando la legge di Stevino (Pascal) al mercurio ho $p_G-p_H=\rho_m g(x_{3H}-x_{3G})=\rho_m g\Delta$

per cui

$$\frac{1}{2}\mu_A^2\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4-1\right]=g\Delta\left[\frac{\rho_m}{\rho}-1\right]$$

e quindi $\mu_A = \left\{ 2g\Delta \frac{\frac{\rho_m}{\rho} - 1}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1} \right\}^{\frac{1}{2}}$

Osservazione: la portata del condotto è

$$Q = \mu_A \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} \left\{ 2g\Delta \frac{\frac{\rho_m}{\rho} - 1}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Questo dispositivo, detto tubo di Venturi o Venturimetro, viene effettivamente usato per misurare le portate. Bisogna solo tener conto di una correzione dipendente da Re (n° di Reynolds).